

Capítulo udf

O Cálculo de Seqüentes

Este capítulo apresenta o cálculo de seqüentes padrão LK de Gentzen para a lógica clássica de primeira ordem. Ele poderia ter mais exemplos e exercícios. Para incluir ou excluir material relevante ao cálculo de seqüentes como sistema de prova, use a tag “prfLK”.

seq.1 Regras e Derivações

fol:seq:rul:
sec Para o que segue, sejam $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ representando seqüências finitas de **sentenças**.

Definição seq.1 (Seqüente). Um *seqüente* é uma expressão da forma

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

em que Γ e Δ são seqüências finitas (possivelmente vazias) de **sentenças** da linguagem $\mathcal{L}$. Γ é chamado de *antecedente*, enquanto Δ é o *sucedente*.

A ideia intuitiva por trás de um seqüente é: se todas as **sentenças** no antecedente valem, então ao menos uma das **sentenças** no sucedente vale. Isto é, se $\Gamma = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_m \rangle$ e $\Delta = \langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$, então $\Gamma \Rightarrow \Delta$ vale se, e somente se, explanation

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m) \rightarrow (\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n)$$

vale. Há dois casos especiais: quando Γ é vazio e quando Δ é vazio. Quando Γ é vazio, isto é, $m = 0$, $\Rightarrow \Delta$ vale se, e somente se, $\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$ vale. Quando Δ é vazio, isto é, $n = 0$, $\Gamma \Rightarrow$ vale se, e somente se, $\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m)$ vale. Dizemos que um seqüente é válido se, e somente se, a **sentença** correspondente é válida.

Se Γ é uma seqüência de **sentenças**, escrevemos Γ, φ para o resultado de acrescentar φ à extremidade direita de Γ (e φ, Γ para o resultado de acrescentar φ à extremidade esquerda de Γ). Se Δ também é uma seqüência de **sentenças**, então Γ, Δ é a concatenação das duas seqüências.

Definição seq.2 (Sequente Inicial). Um *sequente inicial* é um sequente de uma das seguintes formas:

1. $\varphi \Rightarrow \varphi$
2. $\Rightarrow \top$
3. $\perp \Rightarrow$

para qualquer **sentença** φ na linguagem.

Derivações no cálculo de sequentes são certas árvores de sequentes, em que os sequentes no topo são sequentes iniciais e, se um sequente está abaixo de um ou dois outros sequentes, ele deve seguir corretamente por uma regra de inferência. As regras para **LK** dividem-se em dois tipos principais: regras *lógicas* e regras *estruturais*. As regras lógicas recebem o nome do **operador principal** da **sentença** que contém φ e/ou ψ no sequente inferior. Cada uma vem em duas versões, uma para inferir um sequente com a **sentença** que contém o **operador lógico** à esquerda, e uma com a **sentença** à direita.

seq.2 Regras Proposicionais

Regras para $\neg$

fol:seq:prl:
sec

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \neg L \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \varphi} \neg R$$

Regras para $\wedge$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

$$\frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge L$$

Regras para $\vee$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee R$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee R$$

Regras para $\rightarrow$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \rightarrow L \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

seq.3 Regras de Quantificadores

fol:seq:qrl:sec Regras para $\forall$

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi(x)} \forall R$$

Em $\forall L$, t é um termo fechado (isto é, um termo sem variáveis). Em $\forall R$, a é **a símbolo de constante** que não pode ocorrer em lugar algum do sequente inferior da regra $\forall R$. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\forall R$.¹

Regras para $\exists$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \exists L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi(x)} \exists R$$

Novamente, t é um termo fechado, e a é **a símbolo de constante** que não ocorre no sequente inferior da regra $\exists L$. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\exists L$.

A condição de que uma variável própria não ocorra no sequente inferior da inferência $\forall R$ ou $\exists L$ é chamada de *condição de variável própria*.

Lembre-se da convenção de que, quando φ é **a fórmula** com a **variável** x livre, indicamos isso escrevendo $\varphi(x)$. No mesmo contexto, $\varphi(t)$ é então uma abreviação de $\varphi[t/x]$. Assim, poderíamos também escrever a regra $\exists R$ como:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi} \exists R$$

Note que t pode já ocorrer em φ , por exemplo, φ poderia ser $P(t, x)$. Assim, inferir $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(t, x)$ de $\Gamma \Rightarrow \Delta, P(t, t)$ é uma aplicação correta de $\exists R$ —pode-se “substituir” uma ou mais, e não necessariamente todas, as ocorrências de t na premissa pela **variável** x ligada. Contudo, as condições de variável

¹Usamos o termo “variável própria” embora a na regra acima seja **a símbolo de constante**. Isso tem razões históricas.

própria em $\forall R$ e $\exists L$ exigem que a **símbolo de constante** a não ocorra em φ . Portanto, não se pode inferir corretamente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(a, x)$ de $\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a, a)$ usando $\forall R$.

explanation

Em $\exists R$ e $\forall L$ não há restrições sobre o termo t . Por outro lado, nas regras $\exists L$ e $\forall R$, a condição de variável própria exige que a **símbolo de constante** a não ocorra em lugar algum fora de $\varphi(a)$ no sequente superior. Isso é necessário para garantir que o sistema seja correto, isto é, que só **deriva** sequentes que sejam válidos. Sem essa condição, o seguinte seria permitido:

$$\frac{\frac{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)} * \exists L}{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x)} \forall R \qquad \frac{\frac{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}{\varphi(a) \Rightarrow \forall x \varphi(x)} * \forall R}{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x)} \exists L$$

Contudo, $\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$ não é válido.

seq.4 Regras Estruturais

Precisamos também de algumas regras que nos permitam reorganizar **sentenças** nos lados esquerdo e direito de um sequente. Como as regras lógicas exigem que as **sentenças** na premissa sobre as quais a regra atua estejam ou na extremidade esquerda ou na extremidade direita, precisamos de uma regra de “troca” que nos permita mover **sentenças** para a posição correta. Às vezes também é importante poder combinar duas **sentenças** idênticas em uma só, e acrescentar **a sentença** em qualquer um dos lados.

fol:seq:srl:
sec

Enfraquecimento

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{WL} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \text{WR}$$

Contração

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{CL} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \text{CR}$$

Troca

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta} \text{XL} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Lambda} \text{XR}$$

Uma série de inferências de enfraquecimento, contração e troca será frequentemente indicada por linhas de inferência duplas.

A regra a seguir, chamada de “corte”, não é estritamente necessária, mas torna muito mais fácil reutilizar e combinar **derivações**.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \text{Cut}$$

seq.5 Derivações

fol:seq:der: sec Já dissemos como é um sequente inicial e demos as regras de inferência. explanation **Derivações** no cálculo de sequentes são geradas indutivamente a partir disso: cada **derivação** ou é um sequente inicial por si só, ou consiste em uma ou duas **derivações** seguidas de uma inferência.

Definição seq.3 (LK-derivação**).** Uma **LK-*derivação*** de um sequente S é uma árvore finita de sequentes que satisfaz as seguintes condições:

1. Os sequentes no topo da árvore são sequentes iniciais.
2. O sequente na base da árvore é S .
3. Todo sequente na árvore exceto S é uma premissa de uma aplicação correta de uma regra de inferência cuja conclusão está diretamente abaixo daquele sequente na árvore.

Dizemos então que S é o *sequente final* da **derivação** e que S é **derivável em LK** (ou **LK-derivável**).

Exemplo seq.4. Todo sequente inicial, por exemplo, $\chi \Rightarrow \chi$, é a **derivação**. Podemos obter uma nova **derivação** a partir disso aplicando, digamos, a regra WL,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{WL}$$

A regra, contudo, deve ser geral: podemos substituir o φ na regra por qualquer **sentença**, por exemplo, também por θ . Se a premissa corresponde ao nosso sequente inicial $\chi \Rightarrow \chi$, isso significa que tanto Γ quanto Δ são apenas χ , e a conclusão seria então $\theta, \chi \Rightarrow \chi$. Assim, o seguinte é a **derivação**:

$$\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi} \text{WL}$$

Podemos agora aplicar outra regra, digamos XL, que nos permite trocar duas **sentenças** à esquerda. Assim, o seguinte também é uma **derivação** correta:

$$\frac{\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi} \text{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi} \text{XL}$$

Nesta aplicação da regra, que foi dada como

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta} \text{XL}$$

tanto Γ quanto Π eram vazios, Δ é χ , e os papéis de φ e ψ são desempenhados por θ e χ , respectivamente. De modo muito semelhante, vemos também que

$$\frac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta} \text{WL}$$

é a **derivação**. Agora podemos pegar essas duas **derivações** e combiná-las usando $\wedge R$. Aquela regra era

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

No nosso caso, as premissas devem corresponder aos últimos sequentes das **derivações** que terminam nas premissas. Isso significa que Γ é χ, θ , Δ é vazio, φ é χ e ψ é θ . Assim, a conclusão, se a inferência for correta, é $\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta$.

$$\frac{\frac{\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi} \text{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi} \text{XL} \quad \frac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta} \text{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta} \wedge R$$

É claro que também podemos inverter as premissas; então φ seria θ e ψ seria χ .

$$\frac{\frac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta} \text{WL} \quad \frac{\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi} \text{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi} \text{XL}}{\chi, \theta \Rightarrow \theta \wedge \chi} \wedge R$$

seq.6 Exemplos de Derivações

Exemplo seq.5. Dê uma **LK-derivação** para o sequente $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

Começamos escrevendo o sequente final desejado na base da **derivação**.

$$\overline{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}$$

Em seguida, precisamos descobrir que tipo de inferência poderia ter um sequente inferior dessa forma. Poderia ser uma regra estrutural, mas é uma boa ideia começar procurando uma regra lógica. O único conectivo lógico que ocorre no sequente inferior é $\wedge$, então procuramos uma regra de $\wedge$ e, como o símbolo $\wedge$ ocorre no antecedente, estamos diante da regra $\wedge L$.

fol:seq:pro:
sec

$$\frac{}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L$$

Há duas opções para o que poderia ter sido o sequente superior da inferência $\wedge L$: poderíamos ter um sequente superior $\varphi \Rightarrow \varphi$ ou $\psi \Rightarrow \varphi$. Claramente, $\varphi \Rightarrow \varphi$ é um sequente inicial (o que é bom), enquanto $\psi \Rightarrow \varphi$ não é derivável em geral. Preenchemos o sequente superior:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L$$

Agora temos uma **LK-derivação** correta do sequente $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

Exemplo seq.6. Dê uma **LK-derivação** para o sequente $\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$.

Comece escrevendo o sequente final desejado na base da **derivação**.

$$\frac{}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}$$

Para encontrar uma regra lógica que pudesse nos dar esse sequente final, olhamos para os conectivos lógicos no sequente final: $\neg$, $\vee$ e $\rightarrow$. No momento, só nos importam $\vee$ e $\rightarrow$, porque são **operadores principais** de **sentenças** no sequente final, enquanto $\neg$ está dentro do escopo de outro conectivo, de modo que cuidaremos dele depois. Nossas opções de regras lógicas para a inferência final são, portanto, a regra $\vee L$ e a regra $\rightarrow R$. Poderíamos escolher qualquer uma das regras, na verdade, mas vamos escolher a regra $\rightarrow R$ (quando não fosse por outro motivo, porque ela nos permite adiar a divisão em dois ramos). De acordo com a forma das inferências $\rightarrow R$ que podem produzir o sequente inferior, isto deve ser assim:

$$\frac{\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Se movermos $\neg\varphi \vee \psi$ para a parte externa do antecedente, podemos aplicar a regra $\vee L$. De acordo com o esquema, isto deve se dividir em dois sequentes superiores como segue:

$$\frac{\frac{\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \frac{}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \vee L}{\frac{\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \text{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R}$$

Lembre-se de que estamos tentando subir até sequentes iniciais; parece que estamos bem perto! O ramo direito está a apenas um enfraquecimento e uma troca de um sequente inicial, e então estará pronto:

$$\frac{\frac{\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \frac{\frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} \text{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} \text{XL}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \vee L}{\frac{\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \text{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R}$$

Agora, olhando para o ramo esquerdo, o único conectivo lógico em qualquer **sentença** é o símbolo $\neg$ nas **sentenças** do antecedente, então estamos diante de uma instância da regra $\neg$ L.

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\neg \varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \neg L \quad \frac{\frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} WL \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} XL}{\neg \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \vee L \quad \frac{\neg \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}{\varphi, \neg \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} XR}{\neg \varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

De modo semelhante a como finalizamos o ramo direito, estamos a apenas um enfraquecimento e uma troca de finalizar também este ramo esquerdo.

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi} WR \quad \frac{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi} XR \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} WL \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} XL}{\neg \varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \neg L \quad \frac{\neg \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}{\varphi, \neg \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} XR}{\neg \varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Exemplo seq.7. Dê uma **LK-derivação** do sequente $\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

Usando as técnicas acima, começamos escrevendo o sequente final desejado na base.

$$\frac{}{\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Os conectivos principais disponíveis das **sentenças** no sequente final são o símbolo $\vee$ e o símbolo $\neg$. Funcionaria aplicar aqui ou a regra $\vee$ L ou a regra $\neg$ R, mas começamos com a regra $\neg$ R porque ela evita, por ora, a divisão em dois ramos:

$$\frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow} \neg R}{\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Agora temos a escolha de olhar para a regra $\wedge$ L ou a regra $\vee$ L. Vejamos o que acontece quando aplicamos a regra $\wedge$ L: temos a escolha de começar com o sequente $\varphi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow$ ou com o sequente $\psi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow$. Como a **derivação** é simétrica em relação a φ e ψ , vamos com o primeiro:

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow} \wedge L}{\varphi \wedge \psi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow} \neg R}{\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Continuando a preencher a **derivação**, vemos que esbarramos em um problema:

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L \quad \frac{\overline{\varphi \Rightarrow \psi} \quad ?}{\neg\psi, \varphi \Rightarrow} \neg L \\
\hline
\frac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \Rightarrow} \vee L \\
\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow} XL \\
\frac{}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow} \wedge L \\
\hline
\frac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \neg R
\end{array}$$

O topo do ramo direito não pode ser reduzido mais, e ele não pode ser levado, por meio de inferências estruturais, a um sequente inicial, então este não é o caminho certo a tomar. Assim, claramente, foi um erro aplicar a regra $\wedge L$ acima. Voltando ao que tínhamos antes e executando a regra $\vee L$ em vez disso, obtemos

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \quad \frac{}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \\
\hline
\frac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \vee L \\
\frac{}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow} XL \\
\hline
\frac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \neg R
\end{array}$$

Completando cada ramo como fizemos antes, obtemos

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi} \wedge L \\
\frac{}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \neg L \quad \frac{}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \neg L \\
\hline
\frac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \vee L \\
\frac{}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow} XL \\
\hline
\frac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \neg R
\end{array}$$

(Poderíamos ter executado as regras de $\wedge$ mais abaixo do que as regras de $\neg$ nesses passos e ainda assim obtido uma **derivação** correta).

Exemplo seq.8. Até agora não usamos a regra de contração, mas às vezes ela é necessária. Eis um exemplo em que isso acontece. Suponha que queiramos provar $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Aplicar $\vee R$ de trás para frente nos daria uma destas duas **derivações**:

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Rightarrow \varphi} \\
\hline
\frac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi} \vee R
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\frac{\varphi \Rightarrow}{\Rightarrow \neg\varphi} \neg R \\
\hline
\frac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi} \vee R
\end{array}$$

Nenhuma destas, é claro, termina em um sequente inicial. O truque é perceber que a regra de contração nos permite combinar duas cópias de **a sentença** em uma só—e quando estamos buscando uma prova, isto é, indo de baixo para cima, podemos manter uma cópia de $\varphi \vee \neg\varphi$ na premissa, por exemplo,

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi} \\
\frac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi} \vee R \\
\hline
\frac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi} CR
\end{array}$$

Agora podemos aplicar $\vee R$ uma segunda vez, e também obter $\neg\varphi$, o que leva a uma **derivação** completa.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi} \neg R \\
 \frac{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi} \vee R \\
 \frac{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi} XR \\
 \frac{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi} \vee R \\
 \frac{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi} CR
 \end{array}$$

Problema seq.1. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \Rightarrow \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$.
4. $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$.

Problema seq.2. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi \Rightarrow \varphi \rightarrow \chi$.
2. $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
3. $\Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\psi \rightarrow \varphi \Rightarrow \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$.
5. $\Rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$.
6. $\Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\psi$.
7. $\varphi \rightarrow \chi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg\chi \Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \Rightarrow \varphi$.
10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\Rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Problema seq.3. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\varphi \vee \psi$.

4. $\Rightarrow \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.
5. $\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \Rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.
7. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$.
8. $\Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.

(Todos esses requerem a regra CR.)

seq.7 Derivações com Quantificadores

fol:seq:prq:
sec

Exemplo seq.9. Dê uma **LK-derivação** do sequente $\exists x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x)$.

Ao lidar com quantificadores, temos de cuidar para não violar a condição de variável própria, e às vezes isso exige que brinquemos com a ordem de execução de certas inferências. Em geral, ajuda tentar cuidar primeiro das regras sujeitas à condição de variável própria (elas ficarão mais abaixo na prova finalizada). Além disso, é uma boa ideia tentar olhar adiante e adivinhar como o sequente inicial poderia ser. No nosso caso, ele terá de ser algo como $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$. Isso significa que, ao “reverter” as regras de quantificador, teremos de escolher o mesmo termo—que chamaremos de a —tanto para a regra $\forall$ quanto para a regra $\exists$. Se escolhêssemos termos diferentes para cada regra, acabaríamos com algo como $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(b)$, que, é claro, não é derivável.

Começando como de costume, escrevemos

$$\frac{}{\exists x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x)}$$

Poderíamos executar a regra $\exists L$ ou a regra $\neg R$. Como a regra $\exists L$ está sujeita à condição de variável própria, é uma boa ideia cuidar dela mais cedo do que mais tarde, então faremos essa primeiro.

$$\frac{\frac{}{\neg\varphi(a) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x)}}{\exists x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x)} \exists L$$

Aplicando as regras $\neg L$ e $\neg R$ de trás para frente, obtemos

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)}}{\neg\varphi(a), \forall x \varphi(x) \Rightarrow} \neg L}{\forall x \varphi(x), \neg\varphi(a) \Rightarrow} XL}{\neg\varphi(a) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x)} \neg R}{\exists x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x)} \exists L$$

Neste ponto, nossa única opção é executar a regra $\forall L$. Como essa regra não está sujeita à restrição de variável própria, estamos livres. Lembre-se, queremos tentar obter um sequente inicial (da forma $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$), então devemos escolher a como nosso argumento para φ ao aplicarmos a regra.

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}{\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)} \forall L \\
\frac{}{\neg \varphi(a), \forall x \varphi(x) \Rightarrow} \neg L \\
\frac{}{\forall x \varphi(x), \neg \varphi(a) \Rightarrow} XL \\
\frac{}{\neg \varphi(a) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \neg R \\
\frac{}{\exists x \neg \varphi(x) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \exists L
\end{array}$$

É importante, especialmente ao lidar com quantificadores, verificar com cuidado neste ponto que a condição de variável própria não foi violada. Como a única regra que aplicamos sujeita à condição de variável própria foi $\exists L$, e a variável própria a não ocorre em seu sequente inferior (o sequente final), esta é uma **derivação** correta.

Problema seq.4. Dê **derivções** dos seguintes sequentes:

1. $\Rightarrow (\forall x \varphi(x) \wedge \forall y \psi(y)) \rightarrow \forall z (\varphi(z) \wedge \psi(z)).$
2. $\Rightarrow (\exists x \varphi(x) \vee \exists y \psi(y)) \rightarrow \exists z (\varphi(z) \vee \psi(z)).$
3. $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi) \Rightarrow \exists y \varphi(y) \rightarrow \psi.$
4. $\forall x \neg \varphi(x) \Rightarrow \neg \exists x \varphi(x).$
5. $\Rightarrow \neg \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \neg \varphi(x).$
6. $\Rightarrow \neg \exists x \forall y ((\varphi(x, y) \rightarrow \neg \varphi(y, y)) \wedge (\neg \varphi(y, y) \rightarrow \varphi(x, y))).$

Problema seq.5. Dê **derivções** dos seguintes sequentes:

1. $\Rightarrow \neg \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \neg \varphi(x).$
2. $(\forall x \varphi(x) \rightarrow \psi) \Rightarrow \exists y (\varphi(y) \rightarrow \psi).$
3. $\Rightarrow \exists x (\varphi(x) \rightarrow \forall y \varphi(y)).$

(Todos esses requerem a regra CR.)

Esta seção reúne as definições da relação de demonstrabilidade e de consistência para a dedução natural.

seq.8 Noções da Teoria da Prova

explanation Assim como definimos uma série de noções semânticas importantes (validade, consequência, satisfatibilidade), definimos agora as *noções da teoria da prova* correspondentes. Elas não são definidas por apelo à satisfação de **sentenças** em **estruturas**, mas por apelo à **derivabilidade** ou à **não derivabilidade** de certos sequentes. Foi uma descoberta importante que essas noções coincidem. Que elas coincidem é o conteúdo dos teoremas da *correção* e da *completude*. fol:seq:ptn:sec

Definição seq.10 (Teoremas). A sentença φ é um *teorema* se há a *derivação* em **LK** do sequente $\Rightarrow \varphi$. Escrevemos $\vdash \varphi$ se φ é um teorema e $\nvdash \varphi$ se não é.

Definição seq.11 (Derivabilidade). A sentença φ é *derivável* de um conjunto de sentenças Γ , $\Gamma \vdash \varphi$, se, e somente se, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e uma sequência Γ'_0 das sentenças em Γ_0 tal que **LK** deriva $\Gamma'_0 \Rightarrow \varphi$. Se φ não é derivável de Γ , escrevemos $\Gamma \nvdash \varphi$.

Por causa das regras de contração, enfraquecimento e troca, a ordem e o número de sentenças em Γ'_0 não importam: se um sequente $\Gamma'_0 \Rightarrow \varphi$ é derivável, então também o é $\Gamma''_0 \Rightarrow \varphi$ para qualquer Γ''_0 que contenha as mesmas sentenças que Γ'_0 . Por exemplo, se $\Gamma_0 = \{\psi, \chi\}$, então tanto $\Gamma'_0 = \langle \psi, \psi, \chi \rangle$ quanto $\Gamma''_0 = \langle \chi, \chi, \psi \rangle$ são sequências que contêm apenas as sentenças em Γ_0 . Se um sequente contendo uma delas é derivável, o outro também é, por exemplo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\psi, \psi, \chi \Rightarrow \varphi}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi} \text{CL} \\ \frac{\psi, \chi \Rightarrow \varphi}{\chi, \psi \Rightarrow \varphi} \text{XL} \\ \frac{\chi, \psi \Rightarrow \varphi}{\chi, \chi, \psi \Rightarrow \varphi} \text{WL} \end{array}$$

De agora em diante, diremos que, se Γ_0 é um conjunto finito de sentenças, então $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ é qualquer sequente em que o antecedente é uma sequência de sentenças em Γ_0 , e incluiremos tacitamente contrações, trocas e enfraquecimentos se necessário.

Definição seq.12 (Consistência). Um conjunto de sentenças Γ é *inconsistente* se, e somente se, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que **LK** deriva $\Gamma_0 \Rightarrow$. Se Γ não é inconsistente, isto é, se para todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, **LK** não deriva $\Gamma_0 \Rightarrow$, dizemos que é *consistente*.

fol:seq:ptn:
prop:reflexivity **Proposição seq.13 (Reflexividade).** Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Prova. O sequente inicial $\varphi \Rightarrow \varphi$ é derivável, e $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$. □

fol:seq:ptn:
prop:monotonicity **Proposição seq.14 (Monotonicidade).** Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Delta \vdash \varphi$.

Prova. Suponha $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ é derivável. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, então Γ_0 também é um subconjunto finito de Δ . A derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ mostra, assim, também que $\Delta \vdash \varphi$. □

fol:seq:ptn:
prop:transitivity **Proposição seq.15 (Transitividade).** Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito e a derivação π_0 de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. Se $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então, para algum subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$, há a derivação π_1 de $\varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi$. Considere a seguinte derivação:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \pi_0 \\ \vdots \\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \pi_1 \\ \vdots \\ \varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi \end{array}}{\Gamma_0, \Delta_0 \Rightarrow \psi} \text{Cut}$$

Como $\Gamma_0 \cup \Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta$, isso mostra $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. □

Note que isso significa, em particular, que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\varphi \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$. Segue-se também que se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi_i$ para cada i , então $\Gamma \vdash \psi$.

Proposição seq.16. Γ é inconsistente se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$ para toda sentença φ . fol:seq:ptn:
prop:incons

Prova. Exercício. □

Problema seq.6. Prove **Proposição seq.16**

Proposição seq.17 (Compacidade).

fol:seq:ptn:
prop:proves-compact

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.
2. Se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então Γ é consistente.

Prova. 1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que o sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ tem a derivação. Consequentemente, $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

2. Se Γ é inconsistente, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que **LK** deriva $\Gamma_0 \Rightarrow$. Mas então Γ_0 é um subconjunto finito de Γ que é inconsistente. □

seq.9 Derivabilidade e Consistência

Estabeleceremos agora uma série de propriedades da relação de derivabilidade. Elas são interessantes por si mesmas, mas cada uma terá um papel na prova do teorema da completude.

fol:seq:prv:
sec

Proposição seq.18. Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente, então Γ é inconsistente. fol:seq:prv:
prop:provability-contr

Prova. Há Γ_0 e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finitos tais que **LK** deriva $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ e $\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$. Seja π_0 a **LK-derivação** de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ e π_1 a **LK-derivação** de $\Gamma_1, \varphi \Rightarrow$. Podemos então derivar

$$\frac{\frac{\vdots \pi_0}{\Gamma_0 \Rightarrow \varphi} \quad \frac{\vdots \pi_1}{\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow} \text{Cut}$$

Como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$; portanto, Γ é inconsistente. $\square$

fol:seq:prv: **Proposição seq.19.** $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.
prop:prov-incons

Prova. Primeiro, suponha $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há a **derivação** π_0 de $\Gamma \Rightarrow \varphi$. Acrescentando uma regra $\neg$ L, obtemos a **derivação** de $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$, isto é, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.

Se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, há a **derivação** π_1 de $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$. O seguinte é a **derivação** de $\Gamma \Rightarrow \varphi$:

$$\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi} \neg R \quad \frac{\vdots \pi_1}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \text{Cut} \quad \square$$

Problema seq.7. Prove que $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente.

fol:seq:prv: **Proposição seq.20.** Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$, então Γ é inconsistente.
prop:explicit-inc

Prova. Suponha $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$. Então há a **derivação** π de um sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. O sequente $\neg\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ também é **derivável**:

$$\frac{\frac{\vdots \pi}{\Gamma_0 \Rightarrow \varphi} \quad \frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow} \text{XL}}{\Gamma_0, \neg\varphi \Rightarrow} \text{Cut}$$

Como $\neg\varphi \in \Gamma$ e $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, isso mostra que Γ é inconsistente. $\square$

fol:seq:prv: **Proposição seq.21.** Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são ambos inconsistentes, então Γ é inconsistente.
prop:provability-exhaustive

Prova. Há conjuntos finitos $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ e **LK-derivções** π_0 e π_1 de $\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ e $\neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$, respectivamente. Podemos então derivar

$$\frac{\frac{\frac{\vdots \pi_0}{\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow}}{\Gamma_0 \Rightarrow \neg\varphi} \neg R \quad \frac{\vdots \pi_1}{\neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow} \text{Cut}$$

Como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Portanto, Γ é inconsistente. $\square$

seq.10 Derivabilidade e os Conectivos Proposicionais

explanation Estabelecemos que a relação de **derivabilidade** $\vdash$ do cálculo de seqüentes é forte o suficiente para estabelecer alguns fatos básicos envolvendo os conectivos proposicionais, tais como $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ e $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ (modus ponens). Esses fatos são necessários para a prova do teorema da completude. **fol:seq:ppr:sec**

Proposição seq.22.

1. Tanto $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ quanto $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.
2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

fol:seq:ppr:prop:provability-land
fol:seq:ppr:prop:provability-land-left
fol:seq:ppr:prop:provability-land-right

Prova. 1. Ambos os seqüentes $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ e $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ são **deriváveis**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi} \wedge L$$

2. Eis a **derivação** do seqüente $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

□

Proposição seq.23.

fol:seq:ppr:prop:provability-lor

1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ é inconsistente.
2. Tanto $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

Prova. 1. Damos a **derivação** do seqüente $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow$:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L}{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \quad \frac{\frac{\frac{\psi \Rightarrow \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow} \neg L}{\psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \quad \frac{}{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \vee L$$

(Lembre-se de que linhas de inferência duplas indicam várias inferências de enfraquecimento, contração e troca.)

2. Ambos os seqüentes $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ têm **derivações**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee R \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee R$$

□

Proposição seq.24.

fol:seq:ppr:prop:provability-lif
fol:seq:ppr:prop:provability-lif-left

1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.

fol:seq:ppr:
prop:provability-lif-right

2. Tanto $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Prova. 1. O sequente $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$ é **derivável**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \rightarrow L$$

2. Ambos os sequentes $\neg\varphi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ são **deriváveis**:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow} XL}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi} WR \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} WL \quad \frac{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi}{\neg\varphi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R \quad \frac{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R \quad \square$$

seq.11 Derivabilidade e os Quantificadores

fol:seq:qpr:
sec O teorema da completude também exige que as regras do cálculo de sequentes [explanation](#) produzam os fatos sobre $\vdash$ estabelecidos nesta seção.

fol:seq:qpr:
thm:strong-generalization **Teorema seq.25.** Se c é uma constante que não ocorre em Γ ou $\varphi(x)$ e $\Gamma \vdash \varphi(c)$, então $\Gamma \vdash \forall x \varphi(x)$.

Prova. Seja π_0 uma **LK-derivação** de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi(c)$ para algum $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito. Acrescentando uma inferência $\forall R$, obtemos a **derivação** de $\Gamma_0 \Rightarrow \forall x \varphi(x)$, já que c não ocorre em Γ ou $\varphi(x)$ e, assim, a condição de variável própria é satisfeita. $\square$

fol:seq:qpr:
prop:provability-quantifiers

Proposição seq.26.

1. $\varphi(t) \vdash \exists x \varphi(x)$.

2. $\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(t)$.

Prova. 1. O sequente $\varphi(t) \Rightarrow \exists x \varphi(x)$ é **derivável**:

$$\frac{\varphi(t) \Rightarrow \varphi(t)}{\varphi(t) \Rightarrow \exists x \varphi(x)} \exists R$$

2. O sequente $\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$ é **derivável**:

$$\frac{\varphi(t) \Rightarrow \varphi(t)}{\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)} \forall L \quad \square$$

seq.12 Correção

explanation Um sistema de **derivação**, tal como o cálculo de seqüentes, é *correto* se não pode derivar coisas que de fato não valem. A correção é, assim, uma espécie de propriedade de segurança garantida para sistemas de **derivação**. Dependendo de qual propriedade da teoria da prova está em questão, gostaríamos de saber, por exemplo, que fol:seq:sou:sec

1. todo φ **derivável** é válido;
2. se a **sentença** é **derivável** de algumas outras, ela também é consequência delas;
3. se um conjunto de **sentenças** é inconsistente, ele é insatisfatível.

Essas são propriedades importantes de um sistema de **derivação**. Se alguma delas não vale, o sistema de **derivação** é deficiente—ele **deriva** demais. Consequentemente, estabelecer a correção de um sistema de **derivação** é da máxima importância.

Como todas essas propriedades da teoria da prova são definidas via **derivabilidade** no cálculo de seqüentes de certos seqüentes, provar (1)–(3) acima requer provar algo sobre as propriedades semânticas dos seqüentes **deriváveis**. Primeiro definiremos o que significa um seqüente ser *válido*, e então mostraremos que todo seqüente **derivável** é válido. (1)–(3) seguem-se então como corolários desse resultado.

Definição seq.27. A **estrutura** $\mathfrak{M}$ *satisfaz* um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se, e somente se, ou $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ para algum $\varphi \in \Gamma$ ou $\mathfrak{M} \models \varphi$ para algum $\varphi \in \Delta$.

Um seqüente é *válido* se, e somente se, toda **estrutura** $\mathfrak{M}$ o satisfaz.

Teorema seq.28 (Correção). Se **LK** **deriva** $\Theta \Rightarrow \Xi$, então $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido. fol:seq:sou:thm:sequent-soundness

Prova. Seja π a **derivação** de $\Theta \Rightarrow \Xi$. Procedemos por indução sobre o número de inferências n em π .

Se o número de inferências é 0, então π consiste apenas em um seqüente inicial. Todo seqüente inicial $\varphi \Rightarrow \varphi$ é obviamente válido, pois para toda $\mathfrak{M}$, ou $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ ou $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Se o número de inferências é maior que 0, distinguimos casos de acordo com o tipo da inferência mais inferior. Pela hipótese de indução, podemos supor que as premissas dessa inferência são válidas, já que o número de inferências na **derivação** de qualquer premissa é menor que n .

Primeiro, consideramos as inferências possíveis com apenas uma premissa.

1. A última inferência é um enfraquecimento. Então $\Theta \Rightarrow \Xi$ é $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (se a última inferência é WL) ou $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (se é WR), e a **derivação** termina em uma de

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{WL} \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \text{WR}$$

Pela hipótese de indução, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido, isto é, para toda **estrutura** $\mathfrak{M}$, ou há algum $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$ ou há algum $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$.

Se $\mathfrak{M} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, então $\chi \in \Theta$ também, já que $\Theta = \varphi, \Gamma$, e assim $\mathfrak{M} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Theta$. Analogamente, se $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$, como $\chi \in \Xi$, $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Xi$. Consequentemente, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

2. A última inferência é $\neg$ L: Então a premissa da última inferência é $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ e a conclusão é $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, isto é, a **derivação** termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array}}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \neg\text{L}$$

e $\Theta = \neg\varphi, \Gamma$ enquanto $\Xi = \Delta$.

A hipótese de indução nos diz que $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, isto é, para toda $\mathfrak{M}$, ou (a) para algum $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \not\models \chi$, ou (b) para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \models \chi$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \varphi$. Queremos mostrar que $\Theta \Rightarrow \Xi$ também é válido. Seja $\mathfrak{M}$ a **estrutura**. Se (a) vale, então há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$, mas $\chi \in \Theta$ também. Se (b) vale, há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$, mas $\chi \in \Xi$ também. Por fim, se $\mathfrak{M} \models \varphi$, então $\mathfrak{M} \not\models \neg\varphi$. Como $\neg\varphi \in \Theta$, há $\chi \in \Theta$ tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$. Consequentemente, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

3. A última inferência é $\neg$ R: Exercício.
4. A última inferência é $\wedge$ L: Há duas variantes: $\varphi \wedge \psi$ pode ser inferido à esquerda a partir de φ ou de ψ no lado esquerdo da premissa. No primeiro caso, π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\text{L}$$

e $\Theta = \varphi \wedge \psi, \Gamma$ enquanto $\Xi = \Delta$. Considere a **estrutura** $\mathfrak{M}$. Como, pela hipótese de indução, $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido, (a) $\mathfrak{M} \not\models \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), $\mathfrak{M} \not\models \varphi \wedge \psi$, então há $\chi \in \Theta$ (a saber, $\varphi \wedge \psi$) tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$. No caso (b), há $\chi \in \Gamma$

tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$, e $\chi \in \Theta$ também. No caso (c), há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$, e $\chi \in \Xi$ também, já que $\Xi = \Delta$. Assim, em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido. O caso em que $\varphi \wedge \psi$ é inferido a partir de ψ é tratado da mesma forma, mudando φ para ψ .

5. A última inferência é $\vee R$: Há duas variantes: $\varphi \vee \psi$ pode ser inferido à direita a partir de φ ou de ψ no lado direito da premissa. No primeiro caso, π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee R$$

Agora $\Theta = \Gamma$ e $\Xi = \Delta, \varphi \vee \psi$. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, (a) $\mathfrak{M} \models \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$. No caso (b), há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$. No caso (c), há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$. Assim, em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$, isto é, $\Theta \Rightarrow \Xi$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido. O caso em que $\varphi \vee \psi$ é inferido a partir de ψ é tratado da mesma forma, mudando φ para ψ .

6. A última inferência é $\rightarrow R$: Então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Novamente, a hipótese de indução diz que a premissa é válida; queremos mostrar que a conclusão também é válida. Seja $\mathfrak{M}$ arbitrário. Como $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ é válido, ao menos um dos seguintes casos ocorre: (a) $\mathfrak{M} \not\models \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \models \psi$, (c) $\mathfrak{M} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (d) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. Nos casos (a) e (b), $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ e assim há um $\chi \in \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$. No caso (c), para algum $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \not\models \chi$. No caso (d), para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \models \chi$. Em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ é válido.

7. A última inferência é $\forall L$: Então há a fórmula $\varphi(x)$ e um termo fechado t tais que π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall L$$

Queremos mostrar que a conclusão $\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válida. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Como a premissa $\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válida, (a) $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$, (b) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), por ??, se $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$, então $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$. Como $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$, $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$. Nos casos (b) e (c), $\mathfrak{M}$ também satisfaz $\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido.

8. A última inferência é $\exists R$: Exercício.
9. A última inferência é $\forall R$: Então há a fórmula $\varphi(x)$ e a símbolo de constante a tais que π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a) \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi(x)} \forall R$$

em que a condição de variável própria é satisfeita, isto é, a não ocorre em $\varphi(x)$, Γ ou Δ . Pela hipótese de indução, a premissa da última inferência é válida. Temos de mostrar que a conclusão também é válida, isto é, que para qualquer estrutura $\mathfrak{M}$, (a) $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$, (b) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$.

Suponha que $\mathfrak{M}$ seja a estrutura arbitrária. Se (b) ou (c) vale, terminamos, então suponha que nenhuma vale: para todo $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \not\models \chi$, e para todo $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \not\models \chi$. Temos de mostrar que (a) vale, isto é, $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$. Por ??, basta mostrar que $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ para toda atribuição de variáveis s . Então seja s uma atribuição de variáveis arbitrária. Considere a estrutura $\mathfrak{M}'$ que é exatamente como $\mathfrak{M}$ exceto que $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$. Por ??, para qualquer $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M}' \models \chi$ já que a não ocorre em Γ , e para qualquer $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M}' \not\models \chi$. Mas a premissa é válida, então $\mathfrak{M}' \models \varphi(a)$. Por ??, $\mathfrak{M}', s \models \varphi(a)$, já que $\varphi(a)$ é uma sentença. Agora $s \sim_x s$ com $s(x) = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}'}(a)$, já que definimos $\mathfrak{M}'$ exatamente desse modo. Assim ?? se aplica, e obtemos $\mathfrak{M}', s \models \varphi(x)$. Como a não ocorre em $\varphi(x)$, por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$. Como s era arbitrário, completamos a prova de que $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ para toda atribuição de variáveis.

10. A última inferência é $\exists L$: Exercício.

Agora consideremos as inferências possíveis com duas premissas.

1. A última inferência é um corte: então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda \end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \text{Cut}$$

Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura. Pela hipótese de indução, as premissas são válidas, então $\mathfrak{M}$ satisfaz ambas as premissas. Distinguímos dois casos: (a) $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ e (b) $\mathfrak{M} \models \varphi$. No caso (a), para que $\mathfrak{M}$ satisfaça a premissa esquerda, ela deve satisfazer $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Mas então também satisfaz a conclusão. No caso (b), para que $\mathfrak{M}$ satisfaça a premissa direita, ela deve satisfazer $\Pi \setminus \Delta$. Novamente, $\mathfrak{M}$ satisfaz a conclusão.

2. A última inferência é $\wedge R$. Então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Se $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta$, terminamos. Então suponha que não. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido pela hipótese de indução, $\mathfrak{M} \models \varphi$. Analogamente, como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ é válido, $\mathfrak{M} \models \psi$. Mas então $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$.

3. A última inferência é $\vee L$: Exercício.

4. A última inferência é $\rightarrow L$. Então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \psi, \Pi \Rightarrow \Delta \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta} \rightarrow L$$

Novamente, considere a estrutura $\mathfrak{M}$ e suponha que $\mathfrak{M}$ não satisfaça $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta$. Temos de mostrar que $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi$. Se $\mathfrak{M}$ não satisfaz $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta$, não satisfaz nem $\Gamma \Rightarrow \Delta$ nem $\Pi \Rightarrow \Delta$. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, temos $\mathfrak{M} \models \varphi$. Como $\psi, \Pi \Rightarrow \Delta$ é válido, temos $\mathfrak{M} \not\models \psi$. Mas então $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi$, que é o que queríamos mostrar. $\square$

Problema seq.8. Complete a prova de Teorema seq.28.

Corolário seq.29. Se $\vdash \varphi$, então φ é válido.

fol:seq:sou:
cor:weak-soundness

Corolário seq.30. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

fol:seq:sou:
cor:entailment-soundness

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então, para algum subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, há a derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. Por Teorema seq.28, toda estrutura $\mathfrak{M}$ ou torna algum $\psi \in \Gamma_0$ falso ou torna φ verdadeiro. Logo, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então também $\mathfrak{M} \models \varphi$. $\square$

Corolário seq.31. Se Γ é satisfatível, então é consistente.

fol:seq:sou:
cor:consistency-soundness

Prova. Provamos a contrapositiva. Suponha que Γ não seja consistente. Então há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito e a derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow$. Por Teorema seq.28, $\Gamma_0 \Rightarrow$ é válido. Em outras palavras, para toda estrutura $\mathfrak{M}$, há $\chi \in \Gamma_0$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$, e como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, esse χ também está em Γ . Assim, nenhuma $\mathfrak{M}$ satisfaz Γ , e Γ não é satisfatível. $\square$

seq.13 Derivações com Predicado de identidade

Derivações com predicado de identidade requerem sequentes iniciais e regras de inferência adicionais.

Definição seq.32 (Sequentes iniciais para =). Se t é um termo fechado, então $\Rightarrow t = t$ é um sequente inicial.

As regras para = são (t_1 e t_2 são termos fechados):

$$\frac{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)}{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)} = \qquad \frac{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)}{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)} =$$

Exemplo seq.33. Se s e t são termos fechados, então $s = t, \varphi(s) \vdash \varphi(t)$:

$$\frac{\frac{\varphi(s) \Rightarrow \varphi(s)}{s = t, \varphi(s) \Rightarrow \varphi(s)} \text{WL}}{s = t, \varphi(s) \Rightarrow \varphi(t)} =$$

Isso pode ser familiar como o princípio da substitutibilidade de idênticos, ou Lei de Leibniz.

LK prova que = é simétrica e transitiva:

$$\frac{\frac{\Rightarrow t_1 = t_1}{t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_1} \text{WL}}{t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1} = \qquad \frac{\frac{t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_2}{t_2 = t_3, t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_2} \text{WL}}{t_2 = t_3, t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_3} = \frac{}{t_1 = t_2, t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3} \text{XL}$$

Na derivação à esquerda, a fórmula $x = t_1$ é o nosso $\varphi(x)$. À direita, tomamos $\varphi(x)$ como $t_1 = x$.

Problema seq.9. Dê derivações dos seguintes sequentes:

1. $\Rightarrow \forall x \forall y ((x = y \wedge \varphi(x)) \rightarrow \varphi(y))$
2. $\exists x \varphi(x) \wedge \forall y \forall z ((\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \rightarrow y = z) \Rightarrow \exists x (\varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x))$

seq.14 Correção com Predicado de identidade

Proposição seq.34. LK com sequentes iniciais e regras para a identidade é correto.

fol:seq:sid:
sec

Prova. Sequentes iniciais da forma $\Rightarrow t = t$ são válidos, pois para toda **estrutura** $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models t = t$. (Note que supomos que o termo t seja fechado, isto é, que não contenha variáveis, de modo que atribuições de variáveis são irrelevantes).

Suponha que a última inferência em **a derivação** seja $=$. Então a premissa é $t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)$ e a conclusão é $t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)$. Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que a conclusão é válida, isto é, se $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$ e $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então ou $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$ ou $\mathfrak{M} \models \varphi(t_2)$.

Pela hipótese de indução, a premissa é válida. Isso significa que, se $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$ e $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então ou (a) para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \models \chi$, ou (b) $\mathfrak{M} \models \varphi(t_1)$. No caso (a), terminamos. Considere o caso (b). Seja s uma atribuição de variáveis com $s(x) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1)$. Por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t_1)$. Como $s \sim_x s$, por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$. Como $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$, temos $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$, e portanto $s(x) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Aplicando ?? novamente, temos também $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t_2)$. Por ??, $\mathfrak{M} \models \varphi(t_2)$. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas