

seq.1 Regras de Quantificadores

fol:seq:qrl:
sec

Regras para $\forall$

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi(x)} \forall R$$

Em $\forall L$, t é um termo fechado (isto é, um termo sem variáveis). Em $\forall R$, a é a **símbolo de constante** que não pode ocorrer em lugar algum do sequente inferior da regra $\forall R$. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\forall R$.¹

Regras para $\exists$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \exists L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi(x)} \exists R$$

Novamente, t é um termo fechado, e a é a **símbolo de constante** que não ocorre no sequente inferior da regra $\exists L$. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\exists L$.

A condição de que uma variável própria não ocorra no sequente inferior da inferência $\forall R$ ou $\exists L$ é chamada de *condição de variável própria*.

Lembre-se da convenção de que, quando φ é a **fórmula** com a **variável** x livre, indicamos isso escrevendo $\varphi(x)$. No mesmo contexto, $\varphi(t)$ é então uma abreviação de $\varphi[t/x]$. Assim, poderíamos também escrever a regra $\exists R$ como:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi} \exists R$$

Note que t pode já ocorrer em φ , por exemplo, φ poderia ser $P(t, x)$. Assim, inferir $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x P(t, x)$ de $\Gamma \Rightarrow \Delta, P(t, t)$ é uma aplicação correta de $\exists R$ —pode-se “substituir” uma ou mais, e não necessariamente todas, as ocorrências de t na premissa pela **variável** x ligada. Contudo, as condições de variável própria em $\forall R$ e $\exists L$ exigem que a **símbolo de constante** a não ocorra em φ . Portanto, não se pode inferir corretamente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x P(a, x)$ de $\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a, a)$ usando $\forall R$.

Em $\exists R$ e $\forall L$ não há restrições sobre o termo t . Por outro lado, nas regras $\exists L$ e $\forall R$, a condição de variável própria exige que a **símbolo de constante** a não ocorra em lugar algum fora de $\varphi(a)$ no sequente superior. Isso é necessário para garantir que o sistema seja correto, isto é, que só **deriva** sequentes que sejam válidos. Sem essa condição, o seguinte seria permitido:

¹Usamos o termo “variável própria” embora a na regra acima seja a **símbolo de constante**. Isso tem razões históricas.

$$\frac{\frac{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)} * \exists L}{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x)} \forall R \qquad \frac{\frac{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}{\varphi(a) \Rightarrow \forall x \varphi(x)} * \forall R}{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x)} \exists L$$

Contudo, $\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$ não é válido.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas