

seq.1 Exemplos de Derivações

fol:seq:pro:
sec

Exemplo seq.1. Dê uma **LK-derivação** para o sequente $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

Começamos escrevendo o sequente final desejado na base da **derivação**.

$$\overline{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}$$

Em seguida, precisamos descobrir que tipo de inferência poderia ter um sequente inferior dessa forma. Poderia ser uma regra estrutural, mas é uma boa ideia começar procurando uma regra lógica. O único conectivo lógico que ocorre no sequente inferior é $\wedge$, então procuramos uma regra de $\wedge$ e, como o símbolo $\wedge$ ocorre no antecedente, estamos diante da regra $\wedge L$.

$$\overline{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L$$

Há duas opções para o que poderia ter sido o sequente superior da inferência $\wedge L$: poderíamos ter um sequente superior $\varphi \Rightarrow \varphi$ ou $\psi \Rightarrow \varphi$. Claramente, $\varphi \Rightarrow \varphi$ é um sequente inicial (o que é bom), enquanto $\psi \Rightarrow \varphi$ não é derivável em geral. Preenchemos o sequente superior:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L$$

Agora temos uma **LK-derivação** correta do sequente $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

Exemplo seq.2. Dê uma **LK-derivação** para o sequente $\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$.

Comece escrevendo o sequente final desejado na base da **derivação**.

$$\overline{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}$$

Para encontrar uma regra lógica que pudesse nos dar esse sequente final, olhamos para os conectivos lógicos no sequente final: $\neg$, $\vee$ e $\rightarrow$. No momento, só nos importam $\vee$ e $\rightarrow$, porque são **operadores principais** de **sentenças** no sequente final, enquanto $\neg$ está dentro do escopo de outro conectivo, de modo que cuidaremos dele depois. Nossas opções de regras lógicas para a inferência final são, portanto, a regra $\vee L$ e a regra $\rightarrow R$. Poderíamos escolher qualquer uma das regras, na verdade, mas vamos escolher a regra $\rightarrow R$ (quando não fosse por outro motivo, porque ela nos permite adiar a divisão em dois ramos). De acordo com a forma das inferências $\rightarrow R$ que podem produzir o sequente inferior, isto deve ser assim:

$$\frac{\overline{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Se movermos $\neg\varphi \vee \psi$ para a parte externa do antecedente, podemos aplicar a regra $\vee L$. De acordo com o esquema, isto deve se dividir em dois sequentes superiores como segue:

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \frac{}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \vee L \\
\frac{}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \text{XR} \\
\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \quad \rightarrow R \\
\frac{}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}
\end{array}$$

Lembre-se de que estamos tentando subir até sequentes iniciais; parece que estamos bem perto! O ramo direito está a apenas um enfraquecimento e uma troca de um sequente inicial, e então estará pronto:

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} \text{WL} \\
\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \frac{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} \text{XL} \\
\frac{}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \vee L \\
\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \quad \text{XR} \\
\frac{}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R
\end{array}$$

Agora, olhando para o ramo esquerdo, o único conectivo lógico em qualquer **sentença** é o símbolo $\neg$ nas **sentenças** do antecedente, então estamos diante de uma instância da regra $\neg L$.

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi} \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} \text{WL} \\
\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \frac{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} \text{XL} \\
\frac{}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \vee L \\
\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \quad \text{XR} \\
\frac{}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R
\end{array}$$

De modo semelhante a como finalizamos o ramo direito, estamos a apenas um enfraquecimento e uma troca de finalizar também este ramo esquerdo.

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi} \text{WR} \\
\frac{}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi} \quad \text{XR} \\
\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \neg L \\
\frac{}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \vee L \\
\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \quad \text{XR} \\
\frac{}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R
\end{array}$$

Exemplo seq.3. Dê uma **LK-derivação** do sequente $\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

Usando as técnicas acima, começamos escrevendo o sequente final desejado na base.

$$\frac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Os conectivos principais disponíveis das **sentenças** no sequente final são o símbolo $\vee$ e o símbolo $\neg$. Funcionaria aplicar aqui ou a regra $\vee L$ ou a regra $\neg R$, mas começamos com a regra $\neg R$ porque ela evita, por ora, a divisão em dois ramos:

$$\frac{\overline{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \neg R$$

Agora temos a escolha de olhar para a regra $\wedge L$ ou a regra $\vee L$. Vejamos o que acontece quando aplicamos a regra $\wedge L$: temos a escolha de começar com o sequente $\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow$ ou com o sequente $\psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow$. Como a **derivação** é simétrica em relação a φ e ψ , vamos com o primeiro:

$$\frac{\frac{\overline{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow} \wedge L}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \neg R$$

Continuando a preencher a **derivação**, vemos que esbarramos em um problema:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L \quad \frac{\frac{\overline{\varphi \Rightarrow \psi} \quad ?}{\varphi \Rightarrow \psi} \neg L}{\neg\psi, \varphi \Rightarrow} \vee L}{\frac{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \Rightarrow}{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow} \text{XL}} \wedge L \neg R$$

O topo do ramo direito não pode ser reduzido mais, e ele não pode ser levado, por meio de inferências estruturais, a um sequente inicial, então este não é o caminho certo a tomar. Assim, claramente, foi um erro aplicar a regra $\wedge L$ acima. Voltando ao que tínhamos antes e executando a regra $\vee L$ em vez disso, obtemos

$$\frac{\frac{\overline{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \quad \overline{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \vee L}{\frac{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \text{XL}} \neg R$$

Completando cada ramo como fizemos antes, obtemos

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi} \wedge L}{\frac{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \neg L} \vee L \text{XL} \neg R$$

(Poderíamos ter executado as regras de $\wedge$ mais abaixo do que as regras de $\neg$ nesses passos e ainda assim obtido uma **derivação** correta).

Exemplo seq.4. Até agora não usamos a regra de contração, mas às vezes ela é necessária. Eis um exemplo em que isso acontece. Suponha que queiramos provar $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Aplicar $\vee R$ de trás para frente nos daria uma destas duas **derivações**:

$$\frac{\frac{}{\Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi} \vee R \qquad \frac{\frac{\frac{}{\varphi \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg \varphi} \neg R}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi} \vee R$$

Nenhuma destas, é claro, termina em um sequente inicial. O truque é perceber que a regra de contração nos permite combinar duas cópias de **a sentença** em uma só—e quando estamos buscando uma prova, isto é, indo de baixo para cima, podemos manter uma cópia de $\varphi \vee \neg \varphi$ na premissa, por exemplo,

$$\frac{\frac{\frac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi, \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi, \varphi \vee \neg \varphi} \vee R}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi} CR$$

Agora podemos aplicar $\vee R$ uma segunda vez, e também obter $\neg \varphi$, o que leva a uma **derivação** completa.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \varphi, \neg \varphi} \neg R}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg \varphi} \vee R}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi, \varphi} XR \quad \frac{\frac{\frac{\frac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi, \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi, \varphi \vee \neg \varphi} \vee R}{\Rightarrow \varphi \vee \neg \varphi} CR$$

Problema seq.1. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \Rightarrow \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$.
4. $\varphi \Rightarrow \neg \neg \varphi$.

Problema seq.2. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi \Rightarrow \varphi \rightarrow \chi$.
2. $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
3. $\Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$.
4. $\psi \rightarrow \varphi \Rightarrow \neg \varphi \rightarrow \neg \psi$.
5. $\Rightarrow (\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \neg \varphi$.
6. $\Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg \psi$.
7. $\varphi \rightarrow \chi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg \chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg \chi \Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg \psi \Rightarrow \varphi$.

10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi).$
11. $\Rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi).$
12. $\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$

Problema seq.3. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi.$
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi.$
3. $\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\varphi \vee \psi.$
4. $\Rightarrow \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi.$
5. $\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi.$
6. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \Rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi).$
7. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi.$
8. $\Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \chi).$

(Todos esses requerem a regra CR.)

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas