

seq.1 Derivações com Quantificadores

fol:seq:prq:
sec

Exemplo seq.1. Dê uma **LK-derivação** do sequente $\exists x \neg \varphi(x) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)$.

Ao lidar com quantificadores, temos de cuidar para não violar a condição de variável própria, e às vezes isso exige que brinquemos com a ordem de execução de certas inferências. Em geral, ajuda tentar cuidar primeiro das regras sujeitas à condição de variável própria (elas ficarão mais abaixo na prova finalizada). Além disso, é uma boa ideia tentar olhar adiante e adivinhar como o sequente inicial poderia ser. No nosso caso, ele terá de ser algo como $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$. Isso significa que, ao “reverter” as regras de quantificador, teremos de escolher o mesmo termo—que chamaremos de a —tanto para a regra $\forall$ quanto para a regra $\exists$. Se escolhêssemos termos diferentes para cada regra, acabaríamos com algo como $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(b)$, que, é claro, não é derivável.

Começando como de costume, escrevemos

$$\frac{}{\exists x \neg \varphi(x) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)}$$

Poderíamos executar a regra $\exists L$ ou a regra $\neg R$. Como a regra $\exists L$ está sujeita à condição de variável própria, é uma boa ideia cuidar dela mais cedo do que mais tarde, então faremos essa primeiro.

$$\frac{\frac{}{\neg \varphi(a) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)}}{\exists x \neg \varphi(x) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \exists L$$

Aplicando as regras $\neg L$ e $\neg R$ de trás para frente, obtemos

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)}}{\neg \varphi(a), \forall x \varphi(x) \Rightarrow} \neg L}{\forall x \varphi(x), \neg \varphi(a) \Rightarrow} XL}{\neg \varphi(a) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \neg R}{\exists x \neg \varphi(x) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \exists L$$

Neste ponto, nossa única opção é executar a regra $\forall L$. Como essa regra não está sujeita à restrição de variável própria, estamos livres. Lembre-se, queremos tentar obter um sequente inicial (da forma $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$), então devemos escolher a como nosso argumento para φ ao aplicarmos a regra.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}}{\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)} \forall L}{\neg \varphi(a), \forall x \varphi(x) \Rightarrow} \neg L}{\forall x \varphi(x), \neg \varphi(a) \Rightarrow} XL}{\neg \varphi(a) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \neg R}{\exists x \neg \varphi(x) \Rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \exists L$$

É importante, especialmente ao lidar com quantificadores, verificar com cuidado neste ponto que a condição de variável própria não foi violada. Como a única regra que aplicamos sujeita à condição de variável própria foi $\exists L$, e a variável própria a não ocorre em seu sequente inferior (o sequente final), esta é uma **derivação** correta.

Problema seq.1. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $\Rightarrow (\forall x \varphi(x) \wedge \forall y \psi(y)) \rightarrow \forall z (\varphi(z) \wedge \psi(z)).$
2. $\Rightarrow (\exists x \varphi(x) \vee \exists y \psi(y)) \rightarrow \exists z (\varphi(z) \vee \psi(z)).$
3. $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi) \Rightarrow \exists y \varphi(y) \rightarrow \psi.$
4. $\forall x \neg \varphi(x) \Rightarrow \neg \exists x \varphi(x).$
5. $\Rightarrow \neg \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \neg \varphi(x).$
6. $\Rightarrow \neg \exists x \forall y ((\varphi(x, y) \rightarrow \neg \varphi(y, y)) \wedge (\neg \varphi(y, y) \rightarrow \varphi(x, y))).$

Problema seq.2. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $\Rightarrow \neg \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \neg \varphi(x).$
2. $(\forall x \varphi(x) \rightarrow \psi) \Rightarrow \exists y (\varphi(y) \rightarrow \psi).$
3. $\Rightarrow \exists x (\varphi(x) \rightarrow \forall y \varphi(y)).$

(Todos esses requerem a regra CR.)

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas