

seq.1 Derivabilidade e os Conectivos Proposicionais

fol:seq:ppr: Estabelecemos que a relação de **derivabilidade** $\vdash$ do cálculo de seqüentes é **forte** o suficiente para estabelecer alguns fatos básicos envolvendo os conectivos **sec** proposicionais, tais como $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ e $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ (modus ponens). Esses fatos são necessários para a prova do teorema da completude. **explanation**

Proposição seq.1.

1. Tanto $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ quanto $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.
2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

Prova. 1. Ambos os seqüentes $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ e $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ são **deriváveis**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi} \wedge L$$

2. Eis a **derivação** do seqüente $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

□

Proposição seq.2.

1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ é *inconsistente*.
2. Tanto $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

Prova. 1. Damos a **derivação** do seqüente $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow$:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L}{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \quad \frac{\frac{\frac{\psi \Rightarrow \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow} \neg L}{\psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \neg L}{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \vee L$$

(Lembre-se de que linhas de inferência duplas indicam várias inferências de enfraquecimento, contração e troca.)

2. Ambos os seqüentes $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ têm **derivações**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee R \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee R$$

□

Proposição seq.3.

1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.

2. Tanto $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

fol:seq:ppr:
prop:provability-lf-right

Prova. 1. O sequente $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$ é **derivável**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \rightarrow L$$

2. Ambos os sequentes $\neg\varphi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ são **deriváveis**:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow} XL}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi} WR \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} WL$$

$$\frac{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi}{\neg\varphi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R \quad \frac{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

□

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas