

prf.1 O Cálculo de Sequentes

fol:prf:seq: Enquanto muitos sistemas de **derivação** operam com disposições de **sentenças**,
sec o cálculo de sequentes opera com *sequentes*. Um sequente é uma expressão da forma

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_n,$$

isto é, um par de sequências de **sentenças**, separadas pelo símbolo de sequente $\Rightarrow$. Qualquer uma das sequências pode ser vazia. Uma **derivação** no cálculo de sequentes é uma árvore de sequentes, em que os sequentes mais altos são de uma forma especial (são chamados de “sequentes iniciais” ou “axiomas”) e todo outro sequente segue dos sequentes imediatamente acima dele por uma das regras de inferência. As regras de inferência ou manipulam as **sentenças** nos sequentes (adicionando, removendo ou rearranjando-as à esquerda ou à direita), ou introduzem uma **fórmula** complexa na conclusão da regra. Por exemplo, a regra $\wedge L$ permite a inferência de $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ para $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, e a $\rightarrow R$ permite a inferência de $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ para $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$, para quaisquer Γ, Δ, φ e ψ . (Em particular, Γ e Δ podem ser vazios.)

A relação $\vdash$ baseada no cálculo de sequentes é definida da seguinte forma: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, há alguma sequência Γ_0 tal que toda φ em Γ_0 está em Γ e há uma **derivação** com o sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ em sua raiz. φ é um teorema no cálculo de sequentes se o sequente $\Rightarrow \varphi$ tem uma **derivação**. Por exemplo, aqui está uma **derivação** que mostra que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L}{\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow R$$

Um conjunto Γ é inconsistente no cálculo de sequentes se há uma **derivação** de $\Gamma_0 \Rightarrow$ (em que toda $\varphi \in \Gamma_0$ está em Γ e o lado direito do sequente é vazio). Usando a regra WR , qualquer **sentença** pode ser **derivada** a partir de um conjunto inconsistente.

O cálculo de sequentes foi inventado na década de 1930 por Gerhard Gentzen. Por causa de seu desenho sistemático e simétrico, é um formalismo muito útil para desenvolver uma teoria de **derivações**. É relativamente fácil encontrar **derivações** no cálculo de sequentes, mas essas **derivações** são frequentemente difíceis de ler e sua conexão com provas às vezes não é fácil de ver. Provou ser uma abordagem muito elegante a sistemas de **derivação**, no entanto, e muitas lógicas têm sistemas de cálculo de sequentes.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas