

prf.1 Dedução Natural

fol:prf:ntd:
sec

A dedução natural é um sistema de **derivação** destinado a espelhar o raciocínio real (especialmente o tipo de raciocínio regimentado empregado por matemáticos). O raciocínio real procede por vários padrões “naturais”. Por exemplo, a prova por casos nos permite estabelecer uma conclusão com base em uma premissa disjuntiva, estabelecendo que a conclusão segue de qualquer um dos disjuntos. A prova indireta nos permite estabelecer uma conclusão mostrando que sua negação leva a uma contradição. A prova condicional estabelece uma afirmação condicional “se ... então ...” mostrando que o consequente segue do antecedente. A dedução natural é uma formalização de algumas dessas inferências naturais. Cada um dos conectivos lógicos e quantificadores vem com duas regras, uma de introdução e uma de eliminação, e cada uma corresponde a um desses padrões de inferência natural. Por exemplo, $\rightarrow$ Intro corresponde à prova condicional, e $\vee$ Elim à prova por casos. Uma regra particularmente simples é $\wedge$ Elim, que permite a inferência de $\varphi \wedge \psi$ para φ (ou ψ).

Uma característica que distingue a dedução natural de outros sistemas de **derivação** é o uso de hipóteses. Uma **derivação** em dedução natural é uma árvore de **fórmulas**. Uma única **fórmula** fica na raiz da árvore de **fórmulas**, e as “folhas” da árvore são **fórmulas** das quais a conclusão é derivada. Na dedução natural, algumas **fórmulas** folha desempenham um papel dentro da **derivação**, mas são “consumidas” quando a **derivação** atinge a conclusão. Isso corresponde à prática, no raciocínio real, de introduzir hipóteses que só permanecem em vigor por um curto período. Por exemplo, em uma prova por casos, assumimos a verdade de cada um dos disjuntos; na prova condicional, assumimos a verdade do antecedente; na prova indireta, assumimos a verdade da negação da conclusão. Essa maneira de introduzir hipóteses hipotéticas e depois descartá-las a serviço de estabelecer um passo intermediário é uma marca da dedução natural. As fórmulas nas folhas de uma **derivação** em dedução natural são chamadas de hipóteses, e algumas das regras de inferência podem descarregá-las. Por exemplo, se temos uma **derivação** de ψ a partir de algumas hipóteses que incluem φ , então a regra $\rightarrow$ Intro nos permite inferir $\varphi \rightarrow \psi$ e descartar qualquer hipótese da forma φ . (Para acompanhar quais hipóteses são descartadas em quais inferências, rotulamos a inferência e as hipóteses que ela descarta com um número.) As hipóteses que permanecem **não descarregadas** no final da **derivação** são, juntas, suficientes para a verdade da conclusão, de modo que uma **derivação** estabelece que suas hipóteses **não descarregadas** implicam sua conclusão.

A relação $\Gamma \vdash \varphi$ baseada na dedução natural vale se, e somente se, há uma **derivação** em que φ é a última **sentença** na árvore, e toda folha que está **não descarregada** está em Γ . φ é um teorema na dedução natural se, e somente se, há uma **derivação** em que φ é a última sentença e todas as hipóteses são **descarregadas**. Por exemplo, aqui está uma **derivação** que mostra que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$1 \frac{\frac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi} \wedge \text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{Intro}$$

O rótulo 1 indica que a hipótese $\varphi \wedge \psi$ é **descarregada** na inferência $\rightarrow$ Intro.

Um conjunto Γ é inconsistente se, e somente se, $\Gamma \vdash \perp$ na dedução natural. A regra $\perp_I$ faz com que, a partir de um conjunto inconsistente, qualquer **sentença** possa ser **derivada**.

Sistemas de dedução natural foram desenvolvidos por Gerhard Gentzen e Stanisław Jaśkowski na década de 1930, e depois por Dag Prawitz e Frederic Fitch. Porque suas inferências espelham métodos naturais de prova, é favorecida por filósofos. As versões desenvolvidas por Fitch são frequentemente usadas em livros introdutórios de lógica. Na filosofia da lógica, as regras da dedução natural às vezes foram tomadas como dando os significados dos operadores lógicos (“semântica da Teoria da Prova”).

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas