

ntd.1 Correção

fol:ntd:sou:
sec

Um sistema de **derivação**, como a dedução natural, é *correto* se não pode derivar coisas que de fato não seguem. A correção é assim uma espécie de propriedade de segurança garantida para sistemas de **derivação**. Dependendo de qual propriedade da Teoria da Prova está em questão, gostaríamos de saber, por exemplo, que

explanation

1. toda **sentença derivável** é válida;
2. se uma **sentença** é **derivável** a partir de outras, ela também é uma consequência delas;
3. se um conjunto de **sentenças** é inconsistente, ele é insatisfatível.

Estas são propriedades importantes de um sistema de **derivação**. Se alguma delas não vale, o sistema de **derivação** é deficiente—ele **deriva** demais. Consequentemente, estabelecer a correção de um sistema de **derivação** é da maior importância.

fol:ntd:sou:
thm:soundness

Teorema ntd.1 (Correção). *Se φ é derivável a partir das hipóteses não descarregadas Γ , então $\Gamma \models \varphi$.*

Prova. Seja δ uma **derivação** de φ . Procedemos por indução no número de inferências em δ .

Para a base da indução, mostramos a afirmação quando o número de inferências é 0. Neste caso, δ consiste apenas de uma única **sentença** φ , isto é, uma hipótese. Essa hipótese é **não descarregada**, pois hipóteses só podem ser **descarregadas** por inferências, e não há inferências. Assim, qualquer **estrutura** $\mathfrak{M}$ que satisfaz todas as hipóteses **não descarregadas** da prova também satisfaz φ .

Agora o passo indutivo. Suponha que δ contém n inferências. A(s) premissa(s) da inferência mais baixa são **derivadas** usando sub-**derivações**, cada uma das quais contém menos de n inferências. Assumimos a hipótese de indução: as premissas da inferência mais baixa seguem das hipóteses **não descarregadas** das sub-**derivações** que terminam nessas premissas. Temos que mostrar que a conclusão φ segue das hipóteses **não descarregadas** de toda a prova.

Distinguimos casos de acordo com o tipo da inferência mais baixa. Primeiro, consideramos as possíveis inferências com apenas uma premissa.

1. Suponha que a última inferência é $\neg$ -Intro: a **derivação** tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{n \quad \neg\varphi} \neg\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, $\perp$ segue das hipóteses **não descarregadas** $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de δ_1 . Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$. Suponha por redução ao absurdo que $\mathfrak{M} \models \Gamma$, mas $\mathfrak{M} \not\models \neg\varphi$, isto é, $\mathfrak{M} \models \varphi$. Isto significaria que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Isto é contrário à nossa hipótese de indução. Logo, $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$.

2. A última inferência é $\wedge$ Elim: há duas variantes: φ ou ψ pode ser inferido da premissa $\varphi \wedge \psi$. Considere o primeiro caso. A **derivação** δ tem este aspecto:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi} \wedge\text{Elim}$$

Pela hipótese de indução, $\varphi \wedge \psi$ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ de δ_1 . Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então $\mathfrak{M} \models \varphi$. Suponha $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Pela nossa hipótese de indução ($\Gamma \models \varphi \wedge \psi$), sabemos que $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$. Por definição, $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $\mathfrak{M} \models \varphi$ e $\mathfrak{M} \models \psi$. (O caso em que ψ é inferido de $\varphi \wedge \psi$ é tratado de forma similar.)

3. A última inferência é $\vee$ Intro: há duas variantes: $\varphi \vee \psi$ pode ser inferido da premissa φ ou da premissa ψ . Considere o primeiro caso. A **derivação** tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ de δ_1 . Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$. Suponha $\mathfrak{M} \models \Gamma$; então $\mathfrak{M} \models \varphi$, pois $\Gamma \models \varphi$ (a hipótese de indução). Logo também deve ser o caso que $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$. (O caso em que $\varphi \vee \psi$ é inferido de ψ é tratado de forma similar.)

4. A última inferência é $\rightarrow$ Intro: $\varphi \rightarrow \psi$ é inferido de uma subprova com hipótese φ e conclusão ψ , isto é,

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, ψ segue das hipóteses **não descarregadas** de δ_1 , isto é, $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. As hipóteses **não descarregadas** de δ são apenas Γ , pois φ é descartada na última inferência. Precisamos mostrar que $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$. Por redução ao absurdo, suponha que para alguma estrutura $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models \Gamma$ mas $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi$. Assim, $\mathfrak{M} \models \varphi$ e $\mathfrak{M} \not\models \psi$. Mas por hipótese, ψ é uma consequência de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, isto é, $\mathfrak{M} \models \psi$, o que é uma contradição. Logo, $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

5. A última inferência é $\perp_I$: aqui, δ termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \\ \varphi \end{array}}{\perp_I}$$

Pela hipótese de indução, $\Gamma \models \perp$. Temos que mostrar que $\Gamma \models \varphi$. Suponha o contrário; então para algum $\mathfrak{M}$ temos $\mathfrak{M} \models \Gamma$ e $\mathfrak{M} \not\models \varphi$. Mas sempre temos $\mathfrak{M} \models \perp$, de modo que isto significaria que $\Gamma \not\models \perp$, contrariando a hipótese de indução.

6. A última inferência é $\perp_C$: Exercício.
7. A última inferência é $\forall\text{Intro}$: então δ tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi(a) \end{array}}{\forall x \varphi(x)} \forall\text{Intro}$$

A premissa $\varphi(a)$ é consequência das hipóteses **não descarregadas** Γ pela hipótese de indução. Considere alguma estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Precisamos mostrar que $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$. Como $\forall x \varphi(x)$ é a **sentença**, isto significa que temos que mostrar que para toda atribuição de variáveis s , $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ (??). Como Γ consiste inteiramente em sentenças, $\mathfrak{M}, s \models \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$ por ???. Seja $\mathfrak{M}'$ como $\mathfrak{M}$, exceto que $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$. Como a não ocorre em Γ , $\mathfrak{M}' \models \Gamma$ por ???. Como $\Gamma \models \varphi(a)$, $\mathfrak{M}' \models \varphi(a)$. Como $\varphi(a)$ é a **sentença**, $\mathfrak{M}', s \models \varphi(a)$ por ???. $\mathfrak{M}', s \models \varphi(x)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}' \models \varphi(a)$ por ?? (lembre que $\varphi(a)$ é apenas $\varphi(x)[a/x]$). Assim, $\mathfrak{M}', s \models \varphi(x)$. Como a não ocorre em $\varphi(x)$, por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$. Mas s foi uma atribuição de variáveis arbitrária, de modo que $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$.

8. A última inferência é $\exists\text{Intro}$: Exercício.
9. A última inferência é $\forall\text{Elim}$: Exercício.

Agora consideremos as possíveis inferências com várias premissas: $\vee$ Elim, $\wedge$ Intro, $\rightarrow$ Elim, e $\exists$ Elim.

1. A última inferência é $\wedge$ Intro. $\varphi \wedge \psi$ é inferido das premissas φ e ψ e δ tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_1 de δ_1 e ψ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_2 de δ_2 . As hipóteses **não descarregadas** de δ são $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, de modo que temos que mostrar que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \varphi \wedge \psi$. Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Como $\mathfrak{M} \models \Gamma_1$, deve ser o caso que $\mathfrak{M} \models \varphi$, pois $\Gamma_1 \models \varphi$, e como $\mathfrak{M} \models \Gamma_2$, $\mathfrak{M} \models \psi$, pois $\Gamma_2 \models \psi$. Juntas, $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$.

2. A última inferência é $\vee$ Elim: Exercício.
3. A última inferência é $\rightarrow$ Elim. ψ é inferido das premissas $\varphi \rightarrow \psi$ e φ . A **derivação** δ tem este aspecto:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}{\psi} \rightarrow \text{Elim}$$

Pela hipótese de indução, $\varphi \rightarrow \psi$ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_1 de δ_1 e φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_2 de δ_2 . Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, então $\mathfrak{M} \models \psi$. Suponha $\mathfrak{M} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Como $\Gamma_1 \models \varphi \rightarrow \psi$, $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$. Como $\Gamma_2 \models \varphi$, temos $\mathfrak{M} \models \varphi$. Isto significa que $\mathfrak{M} \models \psi$ (pois se $\mathfrak{M} \not\models \psi$, como $\mathfrak{M} \models \varphi$, teríamos $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi$, contradizendo $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$).

4. A última inferência é $\neg$ Elim: Exercício.
5. A última inferência é $\exists$ Elim: Exercício. □

Problema ntd.1. Complete a prova de **Teorema ntd.1**.

Corolário ntd.2. *Se $\vdash \varphi$, então φ é válida.*

*fol:ntd:sou:
cor:weak-soundness*

Corolário ntd.3. *Se Γ é satisfatível, então é consistente.*

*fol:ntd:sou:
cor:consistency-soundness*

Prova. Provamos a contrapositiva. Suponha que Γ não é consistente. Então $\Gamma \vdash \perp$, isto é, há uma *derivação* de $\perp$ a partir de hipóteses *não descarregadas* em Γ . Por *Teorema ntd.1*, qualquer *estrutura* $\mathfrak{M}$ que satisfaz Γ deve satisfazer $\perp$. Como $\mathfrak{M} \not\models \perp$ para toda *estrutura* $\mathfrak{M}$, nenhuma $\mathfrak{M}$ pode satisfazer Γ , isto é, Γ não é satisfatível. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas