

ntd.1 Regras de Quantificadores

fol:ntd:qrl:
sec

Regras para $\forall$

$$\frac{\varphi(a)}{\forall x \varphi(x)} \forall \text{Intro} \qquad \frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(t)} \forall \text{Elim}$$

Nas regras para $\forall$, t é um termo fechado (um termo que não contém nenhuma variável), e a é **a símbolo de constante** que não ocorre na conclusão $\forall x \varphi(x)$, nem em qualquer hipótese que esteja **não descarregada** na **derivação** que termina com a premissa $\varphi(a)$. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\forall \text{Intro}$.¹

Regras para $\exists$

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x \varphi(x)} \exists \text{Intro} \qquad \frac{\begin{array}{c} [\varphi(a)]^n \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} \exists \text{Elim} \quad n \frac{\exists x \varphi(x)}{\chi}$$

Novamente, t é um termo fechado, e a é **a símbolo de constante** que não ocorre na premissa $\exists x \varphi(x)$, na conclusão χ , nem em qualquer hipótese que esteja **não descarregada** nas **derivações** que terminam com as duas premissas (além das hipóteses $\varphi(a)$). Chamamos a de *variável própria* da inferência $\exists \text{Elim}$.

A condição de que uma variável própria não ocorra nem nas premissas nem em qualquer hipótese que esteja **não descarregada** nas **derivações** que levam às premissas para a inferência $\forall \text{Intro}$ ou $\exists \text{Elim}$ é chamada de *condição de variável própria*.

Lembre-se da convenção de que, quando φ é **a fórmula** com a **variável x** explanation livre, indicamos isso escrevendo $\varphi(x)$. No mesmo contexto, $\varphi(t)$ é então uma abreviação de $\varphi[t/x]$. Assim, poderíamos também escrever a regra $\exists \text{Intro}$ como:

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi} \exists \text{Intro}$$

Note que t pode já ocorrer em φ , por exemplo, φ poderia ser $P(t, x)$. Assim, inferir $\exists x P(t, x)$ de $P(t, t)$ é uma aplicação correta de $\exists \text{Intro}$ —pode-se “substituir” uma ou mais, e não necessariamente todas, as ocorrências de t na premissa pela **variável x** ligada. Contudo, as condições de variável própria em

¹Usamos o termo “variável própria” embora a na regra acima seja uma constante. Isso tem razões históricas.

$\forall$ Intro e $\exists$ Elim exigem que a **símbolo de constante** a não ocorra em φ . Portanto, não se pode inferir corretamente $\forall x P(a, x)$ de $P(a, a)$ usando $\forall$ Intro.

explanation

Em $\exists$ Intro e $\forall$ Elim não há restrições, e o termo t pode ser qualquer coisa, de modo que não temos de nos preocupar com nenhuma condição. Por outro lado, nas regras $\exists$ Elim e $\forall$ Intro, a condição de variável própria exige que a **símbolo de constante** a não ocorra em lugar algum na conclusão nem em uma hipótese **não descarregada**. A condição é necessária para garantir que o sistema seja correto, isto é, que só **deriva sentenças** de hipóteses **não descarregadas** das quais elas se seguem. Sem essa condição, o seguinte seria permitido:

$$\frac{\exists x \varphi(x) \quad \frac{[\varphi(a)]^1}{\forall x \varphi(x)} * \forall \text{Intro}}{\forall x \varphi(x)} \exists \text{Elim}$$

Contudo, $\exists x \varphi(x) \not\vdash \forall x \varphi(x)$.

Como as regras de eliminação para quantificadores só permitem substituir **variáveis** por termos fechados, segue-se que qualquer **fórmula** que possa ser derivada de um conjunto de **sentenças** é ela própria **a sentença**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas