

ntd.1 Exemplos de Derivações

fol:ntd:pro:
sec

Exemplo ntd.1. Vamos dar a derivação da sentença $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

Começamos escrevendo a conclusão desejada na parte inferior da derivação.

$$\frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}$$

Em seguida, precisamos descobrir que tipo de inferência poderia resultar em a sentença desta forma. O operador principal da conclusão é $\rightarrow$, então tentaremos chegar à conclusão usando a regra $\rightarrow$ Intro. O melhor é anotar as suposições envolvidas e rotular as regras de inferência conforme avançamos, para que seja fácil ver se todas as suposições foram descarregadas ao final da prova.

$$\begin{array}{c} [\varphi \wedge \psi]^1 \\ \vdots \\ \varphi \\ 1 \frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{Intro} \end{array}$$

Agora precisamos preencher os passos da suposição $\varphi \wedge \psi$ até φ . Como só temos um conectivo com o qual lidar, $\wedge$, devemos usar a regra $\wedge$ elim. Isso nos dá a seguinte prova:

$$\begin{array}{c} [\varphi \wedge \psi]^1 \\ \varphi \wedge \text{Elim} \\ 1 \frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{Intro} \end{array}$$

Agora temos uma derivação correta de $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

Exemplo ntd.2. Agora vamos dar a derivação de $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Começamos escrevendo a conclusão desejada na parte inferior da derivação.

$$\frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)}$$

Para encontrar uma regra lógica que possa nos dar esta conclusão, observamos os conectivos lógicos na conclusão: $\neg$, $\vee$ e $\rightarrow$. Por enquanto, só nos interessa a primeira ocorrência de $\rightarrow$, porque é o operador principal da sentença na conclusão, enquanto $\neg$, $\vee$ e a segunda ocorrência de $\rightarrow$ estão dentro do escopo de outro conectivo, então cuidaremos deles depois. Começamos, portanto, com a regra $\rightarrow$ Intro. Uma aplicação correta deve ser assim:

$$\begin{array}{c} [\neg\varphi \vee \psi]^1 \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \\ 1 \frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow \text{Intro} \end{array}$$

Isso nos deixa com duas possibilidades para continuar. Podemos continuar trabalhando de baixo para cima e procurar outra aplicação da regra $\rightarrow$ Intro, ou podemos trabalhar de cima para baixo e aplicar a regra $\vee$ Elim. Vamos adotar a segunda opção. Usaremos a suposição $\neg\varphi \vee \psi$ como a premissa mais à esquerda de $\vee$ Elim. Para uma aplicação válida de $\vee$ Elim, as outras duas premissas devem ser idênticas à conclusão $\varphi \rightarrow \psi$, mas cada uma pode ser derivada, por sua vez, de outra suposição, a saber, um dos dois disjuntos de $\neg\varphi \vee \psi$. Nossa **derivação** ficará, então, assim:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} [\neg\varphi]^2 \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^2 \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \\
 2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad \varphi \rightarrow \psi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim} \\
 1 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}
 \end{array}$$

Em cada um dos dois ramos à direita, queremos derivar $\varphi \rightarrow \psi$, o que é melhor feito usando $\rightarrow$ Intro.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} [\neg\varphi]^2, [\varphi]^3 \\ \vdots \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^2, [\varphi]^4 \\ \vdots \\ \psi \end{array} \\
 2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad 3 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \quad 4 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim} \\
 1 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}
 \end{array}$$

Nas duas partes que faltam na **derivação**, precisamos de **derivações** de ψ a partir de $\neg\varphi$ e φ no meio, e a partir de φ e ψ à esquerda. Começemos pelo primeiro caso. $\neg\varphi$ e φ são as duas premissas de $\neg$ Elim:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^3}{\perp} \neg\text{Elim} \\
 \vdots \\
 \psi
 \end{array}$$

Usando $\perp_I$, podemos obter ψ como conclusão e completar o ramo.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} [\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^3 \\ \vdots \\ \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^2, [\varphi]^4 \\ \vdots \\ \psi \end{array} \\
 2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad 3 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \quad 4 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim} \\
 1 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}
 \end{array}$$

Vejam os agora o ramo mais à direita. Aqui é importante perceber que a definição de **derivação** *permite que hipóteses sejam descarregadas* mas *não exige* que o sejam. Em outras palavras, se pudermos derivar ψ a partir de uma das suposições φ e ψ sem usar a outra, tudo bem. E para derivar ψ a partir de ψ é trivial: ψ por si só é tal **a derivação**, e nenhuma inferência é necessária. Portanto, podemos simplesmente eliminar a suposição φ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^3}{\perp} \neg\text{Elim} \\
 \frac{\perp}{\psi} \perp_I \\
 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad \frac{3 \quad \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \quad \frac{[\psi]^2}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \\
 \frac{1 \quad \frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}}{}
 \end{array}$$

Observe que, na **derivação** concluída, a inferência $\rightarrow\text{Intro}$ mais à direita na verdade não descarrega nenhuma hipótese.

Exemplo ntd.3. Até agora não precisamos da regra $\perp_C$. Ela é especial porque nos permite descarregar uma hipótese que não é uma sub-fórmula da conclusão da regra. Está intimamente relacionada à regra $\perp_I$. Na verdade, a regra $\perp_I$ é um caso especial da regra $\perp_C$ —existe uma lógica chamada “lógica intuicionista” na qual apenas $\perp_I$ é permitida. A regra $\perp_C$ é um último recurso quando nada mais funciona. Por exemplo, suponha que queiramos derivar $\varphi \vee \neg\varphi$. Nossa estratégia usual seria tentar derivar $\varphi \vee \neg\varphi$ usando $\vee\text{Intro}$. Mas isso exigiria derivar φ ou $\neg\varphi$ a partir de nenhuma suposição, e isso não pode ser feito. $\perp_C$ ao resgate!

$$\begin{array}{c}
 [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\
 \vdots \\
 \perp \\
 1 \frac{}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
 \end{array}$$

Agora procuramos **a derivação** de $\perp$ a partir de $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$. Como $\perp$ é a conclusão de $\neg\text{Elim}$, podemos tentar isso:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}{\perp} \neg\text{Elim} \\
 \frac{\perp}{1 \quad \varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
 \end{array}$$

Nossa estratégia para encontrar **a derivação** de $\neg\varphi$ exige uma aplicação de $\neg\text{Intro}$:

$$\begin{array}{c}
[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1, [\varphi]^2 \\
\vdots \\
2 \frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \quad \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\
\vdots \\
\varphi \neg\text{Elim} \\
\hline
1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

Aqui, podemos obter $\perp$ facilmente aplicando $\neg\text{Elim}$ à suposição $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ e a $\varphi \vee \neg\varphi$, que segue da nossa nova suposição φ por $\vee\text{Intro}$:

$$\begin{array}{c}
[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \quad \quad \frac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro} \quad \quad \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\
\hline
2 \frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \quad \quad \neg\text{Elim} \quad \quad \quad \vdots \\
\varphi \neg\text{Elim} \\
\hline
1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

No lado direito usamos a mesma estratégia, exceto que obtemos φ por $\perp_C$:

$$\begin{array}{c}
[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \quad \quad \frac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro} \quad \quad \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \quad \quad \frac{[\neg\varphi]^3}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro} \\
\hline
2 \frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \quad \quad \neg\text{Elim} \quad \quad \quad \frac{\perp}{\varphi} \perp_C \quad \quad \quad \neg\text{Elim} \\
\hline
1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

Problema ntd.1. Dê **derivações** que mostrem o seguinte:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$.
4. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

Problema ntd.2. Dê **derivações** que mostrem o seguinte:

1. $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi \vdash \varphi \rightarrow \chi$.
2. $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
3. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\psi \rightarrow \varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$.
5. $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$.
6. $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\psi$.

7. $\varphi \rightarrow \chi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg\chi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$.
10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Problema ntd.3. Dê **derivações** que mostrem o seguinte:

1. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$.
4. $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.
5. $\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.
7. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \vdash \varphi$.
8. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.

(Todos exigem a regra $\perp_C$.)

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas