

## ntd.1 Derivabilidade e Consistência

fol:ntd:prv:sec Estabeleceremos agora várias propriedades da relação de **derivabilidade**. Elas são independentemente interessantes, mas cada uma desempenhará um papel na prova do teorema da completude.

fol:ntd:prv:prop:provability-contr **Proposição ntd.1.** *Se  $\Gamma \vdash \varphi$  e  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  é inconsistente, então  $\Gamma$  é inconsistente.*

*Prova.* Seja a **derivação** de  $\varphi$  a partir de  $\Gamma$  igual a  $\delta_1$  e a **derivação** de  $\perp$  a partir de  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  igual a  $\delta_2$ . Podemos então derivar:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^1 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \perp \\ 1 \frac{\perp}{\neg\varphi} \end{array} \neg\text{Intro} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \neg\text{Elim}}{\perp}$$

Na nova **derivação**, a hipótese  $\varphi$  é **descarregada**, de modo que é uma **derivação** a partir de  $\Gamma$ . □

fol:ntd:prv:prop:prov-incons **Proposição ntd.2.**  *$\Gamma \vdash \varphi$  se, e somente se,  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  é inconsistente.*

*Prova.* Primeiro suponha que  $\Gamma \vdash \varphi$ , isto é, há uma **derivação**  $\delta_0$  de  $\varphi$  a partir de hipóteses **não descarregadas**  $\Gamma$ . Obtemos uma **derivação** de  $\perp$  a partir de  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  da seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \quad \neg\varphi}{\perp} \neg\text{Elim}$$

Agora suponha que  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  é inconsistente, e seja  $\delta_1$  a **derivação** correspondente de  $\perp$  a partir de hipóteses **não descarregadas** em  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ . Obtemos uma **derivação** de  $\varphi$  apenas a partir de  $\Gamma$  usando  $\perp_C$ :

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\neg\varphi]^1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \\ 1 \frac{\perp}{\varphi} \end{array}}{\varphi} \perp_C \quad \square$$

**Problema ntd.1.** Prove que  $\Gamma \vdash \neg\varphi$  se, e somente se,  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  é inconsistente.

fol:ntd:prv:prop:explicit-inc **Proposição ntd.3.** *Se  $\Gamma \vdash \varphi$  e  $\neg\varphi \in \Gamma$ , então  $\Gamma$  é inconsistente.*

*Prova.* Suponha que  $\Gamma \vdash \varphi$  e  $\neg\varphi \in \Gamma$ . Então há uma **derivação**  $\delta$  de  $\varphi$  a partir de  $\Gamma$ . Considere esta aplicação simples da regra  $\neg$ Elim:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \quad \neg\varphi}{\perp} \neg\text{Elim}$$

Como  $\neg\varphi \in \Gamma$ , todas as hipóteses **não descarregadas** estão em  $\Gamma$ ; isto mostra que  $\Gamma \vdash \perp$ .  $\square$

**Proposição ntd.4.** *Se  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  e  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  são ambos inconsistentes, então  $\Gamma$  é inconsistente.*

*fol:ntd:prov:  
prop:provability-exhaustive*

*Prova.* Há **derivações**  $\delta_1$  e  $\delta_2$  de  $\perp$  a partir de  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  e de  $\perp$  a partir de  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ , respectivamente. Podemos então derivar

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\neg\varphi]^2 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\frac{2 \quad \frac{\perp}{\neg\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad 1 \quad \frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro}}{\perp} \neg\text{Elim}}$$

Como as hipóteses  $\varphi$  e  $\neg\varphi$  são **descarregadas**, isto é uma **derivação** de  $\perp$  apenas a partir de  $\Gamma$ . Logo  $\Gamma$  é inconsistente.  $\square$

## Créditos das Imagens

## Referências Bibliográficas