

ntd.1 Noções da Teoria da Prova

fol:ntd:ptn:
sec

Esta seção reúne as definições da relação de demonstrabilidade e de consistência para a dedução natural.

Assim como definimos várias noções semânticas importantes (validade, consequência, satisfatibilidade), agora definimos noções *da Teoria da Prova* correspondentes. Elas não são definidas por apelo à satisfação de **sentenças** em **estruturas**, mas por apelo à **derivabilidade** ou **não derivabilidade** de certas **sentenças** a partir de outras. Foi uma descoberta importante que essas noções coincidem. Que coincidem é o conteúdo dos teoremas de *correção* e *completez*.

explanation

Definição ntd.1 (Teoremas). Uma **sentença** φ é um *teorema* se há uma **derivação** de φ em dedução natural na qual todas as hipóteses são **descarregadas**. Escrevemos $\vdash \varphi$ se φ é um teorema e $\nvdash \varphi$ se não o é.

Definição ntd.2 (Derivabilidade). A **sentença** φ é **derivável** de um conjunto de **sentenças** Γ , $\Gamma \vdash \varphi$, se há uma **derivação** com conclusão φ e na qual toda hipótese é ou **descarregada** ou está em Γ . Se φ não é **derivável** de Γ , escrevemos $\Gamma \nvdash \varphi$.

Definição ntd.3 (Consistência). Um conjunto de **sentenças** Γ é *inconsistente* se, e somente se, $\Gamma \vdash \perp$. Se Γ não é inconsistente, isto é, se $\Gamma \nvdash \perp$, dizemos que é *consistente*.

fol:ntd:ptn:
prop:reflexivity

Proposição ntd.4 (Reflexividade). Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Prova. A hipótese φ por si só é uma **derivação** de φ em que toda hipótese **não descarregada** (isto é, φ) está em Γ . $\square$

fol:ntd:ptn:
prop:monotonicity

Proposição ntd.5 (Monotonicidade). Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Delta \vdash \varphi$.

Prova. Qualquer **derivação** de φ a partir de Γ é também uma **derivação** de φ a partir de Δ . $\square$

fol:ntd:ptn:
prop:transitivity

Proposição ntd.6 (Transitividade). Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, há uma **derivação** δ_0 de φ com todas as hipóteses **não descarregadas** em Γ . Se $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então há uma **derivação** δ_1 de ψ com todas as hipóteses **não descarregadas** em $\{\varphi\} \cup \Delta$. Considere agora:

$$\begin{array}{c}
\Delta, [\varphi]^1 \\
\vdots \delta_1 \\
\vdots \\
\psi \\
\hline
\varphi \rightarrow \psi \xrightarrow{\rightarrow \text{Intro}} \psi \\
\hline
\psi \xrightarrow{\rightarrow \text{Elim}} \psi
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\Gamma \\
\vdots \delta_0 \\
\vdots \\
\varphi
\end{array}$$

As hipóteses **não descarregadas** estão agora todas entre $\Gamma \cup \Delta$, de modo que isto mostra $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. $\square$

Quando $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ é um conjunto finito, podemos usar a notação simplificada $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \vdash \psi$ para $\Gamma \vdash \psi$; em particular, $\varphi \vdash \psi$ significa que $\{\varphi\} \vdash \psi$.

Note que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\varphi \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$. Segue também que se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi_i$ para cada i , então $\Gamma \vdash \psi$.

Proposição ntd.7. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

*fol:ntd:ptn:
prop:incons*

1. Γ é inconsistente.
2. $\Gamma \vdash \varphi$ para toda **sentença** φ .
3. $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg \varphi$ para alguma **sentença** φ .

Prova. Exercício. $\square$

Problema ntd.1. Prove **Proposição ntd.7**

Proposição ntd.8 (Compacidade).

*fol:ntd:ptn:
prop:proves-compact*

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.
2. Se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então Γ é consistente.

Prova. 1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há uma **derivação** δ de φ a partir de Γ . Seja Γ_0 o conjunto de hipóteses **não descarregadas** de δ . Como toda **derivação** é finita, Γ_0 só pode conter finitamente muitas **sentenças**. Assim, δ é uma **derivação** de φ a partir de um Γ_0 finito $\subseteq \Gamma$.

2. Isto é a contrapositiva de (1) no caso especial $\varphi \equiv \perp$. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas