

Capítulo udf

Dedução Natural

Este capítulo apresenta um sistema de dedução natural no estilo de Gentzen/Prawitz.

Para incluir ou excluir material relevante à dedução natural como sistema de prova, use a tag “prfND”.

ntd.1 Regras e Derivações

fol:ntd:rul:
sec

Sistemas de dedução natural pretendem ser um paralelo próximo do raciocínio informal usado em provas matemáticas (daí serem, de certo modo, “naturais”). Provas em dedução natural começam com hipóteses. Em seguida, aplicam-se regras de inferência. As hipóteses são “descarregadas” pelas regras de inferência $\neg$ -Intro, $\rightarrow$ -Intro, $\forall$ -Elim e $\exists$ -Elim, e o rótulo da hipótese *descarregada* é colocado ao lado da inferência para maior clareza.

explanation

Definição ntd.1 (Hipótese). Uma *hipótese* é qualquer *sentença* na posição mais alta de qualquer ramo.

Derivações em dedução natural são certas árvores de *sentenças*, em que as *sentenças* no topo são hipóteses e, se a *sentença* está abaixo de um, dois ou três outros seguintes, ela deve seguir corretamente por uma regra de inferência. As *sentenças* no topo da inferência são chamadas de *premissas* e a *sentença* abaixo, de *conclusão* da inferência. As regras vêm em pares, uma regra de introdução e uma de eliminação para cada *operador lógico*. Elas introduzem a *operador lógico* na conclusão ou removem a *operador lógico* de uma premissa da regra. Algumas das regras permitem que uma hipótese de certo tipo seja *descarregada*. Para indicar qual hipótese é *descarregada* por qual inferência, também atribuímos rótulos tanto à hipótese quanto à inferência. Isso é indicado escrevendo-se a hipótese como “[φ]ⁿ.”

É costume considerar regras para todos os *operadores lógicos* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ e $\perp$, mesmo que alguns deles sejam definidos.

ntd.2 Regras Proposicionais

Regras para $\wedge$

fol:ntd:prl:
sec

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{Intro} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge \text{Elim} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge \text{Elim}$$

Regras para $\vee$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee \text{Intro} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee \text{Intro} \qquad \begin{array}{c} [\varphi]^n \quad [\psi]^n \\ \vdots \quad \vdots \\ \varphi \vee \psi \quad \chi \quad \chi \\ n \quad \chi \end{array} \vee \text{Elim}$$

Regras para $\rightarrow$

$$\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \psi \\ n \end{array} \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{Intro} \qquad \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} \rightarrow \text{Elim}$$

Regras para $\neg$

$$\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \perp \\ n \end{array} \frac{\perp}{\neg \varphi} \neg \text{Intro} \qquad \frac{\neg \varphi \quad \varphi}{\perp} \neg \text{Elim}$$

Regras para $\perp$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{\perp}{\varphi} \perp_I \qquad \qquad \qquad \begin{array}{c} [\neg\varphi]^n \\ \vdots \\ n \frac{\perp}{\varphi} \perp_C \end{array} \end{array}}$$

Note que $\neg$ Intro e $\perp_C$ são muito semelhantes: a diferença é que $\neg$ Intro deriva uma **sentença** negada $\neg\varphi$, mas $\perp_C$, uma **sentença** positiva φ .

Sempre que uma regra indica que alguma hipótese pode ser descarregada, nós tomamos isso como uma permissão, mas não uma exigência. Por exemplo, na regra $\rightarrow$ Intro, podemos descarregar qualquer número de hipóteses da forma φ na **derivação** da premissa ψ , inclusive zero.

ntd.3 Regras de Quantificadores

fol:ntd:qrl:
sec

Regras para $\forall$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{\varphi(a)}{\forall x \varphi(x)} \forall\text{Intro} \qquad \qquad \qquad \frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(t)} \forall\text{Elim} \end{array}}$$

Nas regras para $\forall$, t é um termo fechado (um termo que não contém nenhuma variável), e a é **a símbolo de constante** que não ocorre na conclusão $\forall x \varphi(x)$, nem em qualquer hipótese que esteja **não descarregada** na **derivação** que termina com a premissa $\varphi(a)$. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\forall$ Intro.¹

Regras para $\exists$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{\varphi(t)}{\exists x \varphi(x)} \exists\text{Intro} \qquad \qquad \qquad \begin{array}{c} [\varphi(a)]^n \\ \vdots \\ n \frac{\exists x \varphi(x)}{\chi} \exists\text{Elim} \end{array} \end{array}}$$

Novamente, t é um termo fechado, e a é **a símbolo de constante** que não ocorre na premissa $\exists x \varphi(x)$, na conclusão χ , nem em qualquer hipótese que esteja **não**

¹Usamos o termo “variável própria” embora a na regra acima seja uma constante. Isso tem razões históricas.

descarregada nas derivações que terminam com as duas premissas (além das hipóteses $\varphi(a)$). Chamamos a de *variável própria* da inferência $\exists$ Elim.

A condição de que uma variável própria não ocorra nem nas premissas nem em qualquer hipótese que esteja não descarregada nas derivações que levam às premissas para a inferência $\forall$ Intro ou $\exists$ Elim é chamada de *condição de variável própria*.

explanation

Lembre-se da convenção de que, quando φ é a fórmula com a variável x livre, indicamos isso escrevendo $\varphi(x)$. No mesmo contexto, $\varphi(t)$ é então uma abreviação de $\varphi[t/x]$. Assim, poderíamos também escrever a regra $\exists$ Intro como:

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi} \exists \text{Intro}$$

Note que t pode já ocorrer em φ , por exemplo, φ poderia ser $P(t, x)$. Assim, inferir $\exists x P(t, x)$ de $P(t, t)$ é uma aplicação correta de $\exists$ Intro—pode-se “substituir” uma ou mais, e não necessariamente todas, as ocorrências de t na premissa pela variável x ligada. Contudo, as condições de variável própria em $\forall$ Intro e $\exists$ Elim exigem que a símbolo de constante a não ocorra em φ . Portanto, não se pode inferir corretamente $\forall x P(a, x)$ de $P(a, a)$ usando $\forall$ Intro.

explanation

Em $\exists$ Intro e $\forall$ Elim não há restrições, e o termo t pode ser qualquer coisa, de modo que não temos de nos preocupar com nenhuma condição. Por outro lado, nas regras $\exists$ Elim e $\forall$ Intro, a condição de variável própria exige que a símbolo de constante a não ocorra em lugar algum na conclusão nem em uma hipótese não descarregada. A condição é necessária para garantir que o sistema seja correto, isto é, que só deriva sentenças de hipóteses não descarregadas das quais elas se seguem. Sem essa condição, o seguinte seria permitido:

$$\frac{\frac{\exists x \varphi(x)}{\forall x \varphi(x)} \exists \text{Elim} \quad \frac{[\varphi(a)]^1}{\forall x \varphi(x)} * \forall \text{Intro}}{\forall x \varphi(x)} \exists \text{Elim}$$

Contudo, $\exists x \varphi(x) \not\models \forall x \varphi(x)$.

Como as regras de eliminação para quantificadores só permitem substituir variáveis por termos fechados, segue-se que qualquer fórmula que possa ser derivada de um conjunto de sentenças é ela própria a sentença.

ntd.4 Derivações

explanation

Já dissemos o que é uma hipótese e demos as regras de inferência. Derivações em dedução natural são geradas indutivamente a partir disso: cada derivação ou é uma hipótese por si só, ou consiste em uma, duas ou três derivações seguidas de uma inferência correta. fol:ntd:der:sec

Definição ntd.2 (Derivação). A derivação de a sentença φ a partir de hipóteses Γ é uma árvore finita de sentenças que satisfaz as seguintes condições:

1. As sentenças no topo da árvore ou estão em Γ ou são descarregadas por uma inferência na árvore.

2. A **sentença** na base da árvore é φ .
3. Toda **sentença** na árvore exceto a sentença φ na base é uma premissa de uma aplicação correta de uma regra de inferência cuja conclusão está diretamente abaixo daquela **sentença** na árvore.

Dizemos então que φ é a *conclusão* da **derivação** e Γ , suas hipóteses **não descarregadas**.

Se existe a **derivação** de φ a partir de Γ , dizemos que φ é **derivável** a partir de Γ , ou, em símbolos: $\Gamma \vdash \varphi$. Se há a **derivação** de φ em que toda hipótese é **descarregada**, escrevemos $\vdash \varphi$.

Exemplo ntd.3. Toda hipótese por si só é a **derivação**. Assim, por exemplo, φ por si só é a **derivação**, e ψ por si só também. Podemos obter uma nova **derivação** a partir delas aplicando, digamos, a regra $\wedge$ Intro,

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{Intro}$$

Essas regras devem ser gerais: podemos substituir o φ e ψ nela por quaisquer **sentenças**, por exemplo, por χ e θ . Então a conclusão seria $\chi \wedge \theta$, e assim

$$\frac{\chi \quad \theta}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro}$$

é uma **derivação** correta. É claro que também podemos trocar as hipóteses, de modo que θ desempenhe o papel de φ e χ o de ψ . Assim,

$$\frac{\theta \quad \chi}{\theta \wedge \chi} \wedge \text{Intro}$$

também é uma **derivação** correta.

Podemos agora aplicar outra regra, digamos, $\rightarrow$ Intro, que nos permite concluir um condicional e nos permite descarregar qualquer hipótese que seja idêntica ao antecedente desse condicional. Assim, ambas as seguintes seriam **derivações** corretas:

$$1 \frac{\frac{[\chi]^1 \quad \theta}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro}}{\chi \rightarrow (\chi \wedge \theta)} \rightarrow \text{Intro} \quad 1 \frac{\frac{\chi \quad [\theta]^1}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro}}{\theta \rightarrow (\chi \wedge \theta)} \rightarrow \text{Intro}$$

Elas mostram, respectivamente, que $\theta \vdash \chi \rightarrow (\chi \wedge \theta)$ e $\chi \vdash \theta \rightarrow (\chi \wedge \theta)$.

Lembre-se de que descarregar hipóteses é uma permissão, não uma exigência: não temos de descarregar as hipóteses. Em particular, podemos aplicar uma regra mesmo que as hipóteses não estejam presentes na **derivação**. Por exemplo, o seguinte é válido, embora não haja hipótese φ a ser **descarregada**:

$$1 \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{Intro}$$

ntd.5 Exemplos de Derivações

Exemplo ntd.4. Vamos dar a derivação da sentença $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

Começamos escrevendo a conclusão desejada na parte inferior da derivação.

fol:ntd:pro:
sec

$$\frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}$$

Em seguida, precisamos descobrir que tipo de inferência poderia resultar em a sentença desta forma. O operador principal da conclusão é $\rightarrow$, então tentaremos chegar à conclusão usando a regra $\rightarrow$ Intro. O melhor é anotar as suposições envolvidas e rotular as regras de inferência conforme avançamos, para que seja fácil ver se todas as suposições foram descarregadas ao final da prova.

$$\begin{array}{c} [\varphi \wedge \psi]^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \quad 1 \frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{Intro}$$

Agora precisamos preencher os passos da suposição $\varphi \wedge \psi$ até φ . Como só temos um conectivo com o qual lidar, $\wedge$, devemos usar a regra $\wedge$ elim. Isso nos dá a seguinte prova:

$$\begin{array}{c} [\varphi \wedge \psi]^1 \\ \varphi \end{array} \quad \wedge \text{Elim} \quad 1 \frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{Intro}$$

Agora temos uma derivação correta de $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

Exemplo ntd.5. Agora vamos dar a derivação de $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Começamos escrevendo a conclusão desejada na parte inferior da derivação.

$$\frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)}$$

Para encontrar uma regra lógica que possa nos dar esta conclusão, observamos os conectivos lógicos na conclusão: $\neg$, $\vee$ e $\rightarrow$. Por enquanto, só nos interessa a primeira ocorrência de $\rightarrow$, porque é o operador principal da sentença na conclusão, enquanto $\neg$, $\vee$ e a segunda ocorrência de $\rightarrow$ estão dentro do escopo de outro conectivo, então cuidaremos deles depois. Começamos, portanto, com a regra $\rightarrow$ Intro. Uma aplicação correta deve ser assim:

$$\begin{array}{c} [\neg\varphi \vee \psi]^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \quad 1 \frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow \text{Intro}$$

Isso nos deixa com duas possibilidades para continuar. Podemos continuar trabalhando de baixo para cima e procurar outra aplicação da regra $\rightarrow$ Intro, ou podemos trabalhar de cima para baixo e aplicar a regra $\vee$ Elim. Vamos adotar a segunda opção. Usaremos a suposição $\neg\varphi \vee \psi$ como a premissa mais à esquerda de $\vee$ Elim. Para uma aplicação válida de $\vee$ Elim, as outras duas premissas devem ser idênticas à conclusão $\varphi \rightarrow \psi$, mas cada uma pode ser derivada, por sua vez, de outra suposição, a saber, um dos dois disjuntos de $\neg\varphi \vee \psi$. Nossa **derivação** ficará, então, assim:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} [\neg\varphi]^2 \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^2 \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \\
 2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad \varphi \rightarrow \psi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim} \\
 1 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}
 \end{array}$$

Em cada um dos dois ramos à direita, queremos derivar $\varphi \rightarrow \psi$, o que é melhor feito usando $\rightarrow$ Intro.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} [\neg\varphi]^2, [\varphi]^3 \\ \vdots \\ \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^2, [\varphi]^4 \\ \vdots \\ \psi \end{array} \\
 2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad 3 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \quad 4 \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim} \\
 1 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}
 \end{array}$$

Nas duas partes que faltam na **derivação**, precisamos de **derivações** de ψ a partir de $\neg\varphi$ e φ no meio, e a partir de φ e ψ à esquerda. Começemos pelo primeiro caso. $\neg\varphi$ e φ são as duas premissas de $\neg$ Elim:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^3}{\perp} \neg\text{Elim} \\
 \vdots \\
 \psi
 \end{array}$$

Usando $\perp_I$, podemos obter ψ como conclusão e completar o ramo.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} [\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^3 \\ \vdots \\ \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^2, [\varphi]^4 \\ \vdots \\ \psi \end{array} \\
 2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad 3 \frac{\frac{\perp}{\psi} \perp_I}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \quad 4 \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim} \\
 1 \frac{\varphi \rightarrow \psi}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}
 \end{array}$$

Vejamos agora o ramo mais à direita. Aqui é importante perceber que a definição de **derivação** *permite que hipóteses sejam descarregadas* mas *não exige* que o sejam. Em outras palavras, se pudermos derivar ψ a partir de uma das suposições φ e ψ sem usar a outra, tudo bem. E para derivar ψ a partir de ψ é trivial: ψ por si só é tal **a derivação**, e nenhuma inferência é necessária. Portanto, podemos simplesmente eliminar a suposição φ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^3}{\perp} \neg\text{Elim} \\
 \frac{\perp}{\psi} \perp_I \\
 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad \frac{3 \quad \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \quad \frac{[\psi]^2}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim} \\
 \frac{2 \quad \varphi \rightarrow \psi}{1 \quad (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}
 \end{array}$$

Observe que, na **derivação** concluída, a inferência $\rightarrow\text{Intro}$ mais à direita na verdade não descarrega nenhuma hipótese.

Exemplo ntd.6. Até agora não precisamos da regra $\perp_C$. Ela é especial porque nos permite descarregar uma hipótese que não é uma sub-fórmula da conclusão da regra. Está intimamente relacionada à regra $\perp_I$. Na verdade, a regra $\perp_I$ é um caso especial da regra $\perp_C$ —existe uma lógica chamada “lógica intuicionista” na qual apenas $\perp_I$ é permitida. A regra $\perp_C$ é um último recurso quando nada mais funciona. Por exemplo, suponha que queiramos derivar $\varphi \vee \neg\varphi$. Nossa estratégia usual seria tentar derivar $\varphi \vee \neg\varphi$ usando $\vee\text{Intro}$. Mas isso exigiria derivar φ ou $\neg\varphi$ a partir de nenhuma suposição, e isso não pode ser feito. $\perp_C$ ao resgate!

$$\begin{array}{c}
 [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 1 \quad \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
 \end{array}$$

Agora procuramos **a derivação** de $\perp$ a partir de $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$. Como $\perp$ é a conclusão de $\neg\text{Elim}$, podemos tentar isso:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}{\neg\varphi \quad \varphi} \neg\text{Elim} \\
 \frac{1 \quad \perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
 \end{array}$$

Nossa estratégia para encontrar **a derivação** de $\neg\varphi$ exige uma aplicação de $\neg\text{Intro}$:

$$\begin{array}{c}
[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1, [\varphi]^2 \\
\vdots \\
2 \frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \quad \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\
\vdots \\
\varphi \neg\text{Elim} \\
\hline
1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

Aqui, podemos obter $\perp$ facilmente aplicando $\neg\text{Elim}$ à suposição $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ e a $\varphi \vee \neg\varphi$, que segue da nossa nova suposição φ por $\vee\text{Intro}$:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \frac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro}}{\neg\text{Elim}} \quad \quad \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\
\vdots \\
\varphi \neg\text{Elim} \\
\hline
2 \frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \quad \quad \varphi \neg\text{Elim} \\
\hline
1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

No lado direito usamos a mesma estratégia, exceto que obtemos φ por $\perp_C$:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \frac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro}}{\neg\text{Elim}} \quad \quad \quad \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \frac{[\neg\varphi]^3}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro}}{\neg\text{Elim}} \\
\hline
2 \frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \quad \quad 3 \frac{\perp}{\varphi} \perp_C \\
\hline
1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

Problema ntd.1. Dê *derivações* que mostrem o seguinte:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$.
4. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

Problema ntd.2. Dê *derivações* que mostrem o seguinte:

1. $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi \vdash \varphi \rightarrow \chi$.
2. $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
3. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\psi \rightarrow \varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$.
5. $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$.
6. $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\psi$.

7. $\varphi \rightarrow \chi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg\chi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$.
10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Problema ntd.3. Dê **derivações** que mostrem o seguinte:

1. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$.
4. $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.
5. $\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.
7. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \vdash \varphi$.
8. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.

(Todos exigem a regra $\perp_C$.)

ntd.6 Derivações com Quantificadores

Exemplo ntd.7. Ao lidar com quantificadores, temos de cuidar para não violar a condição de variável própria, e às vezes isso exige que brinquemos com a ordem de execução de certas inferências. Em geral, ajuda tentar cuidar primeiro das regras sujeitas à condição de variável própria (elas ficarão mais abaixo na prova finalizada).

Vamos ver como daríamos a **derivação** de **fórmula** $\exists x \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x \varphi(x)$. Começando como de costume, escrevemos

$$\overline{\exists x \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x \varphi(x)}$$

Começamos escrevendo o que seria necessário para justificar esse último passo usando a regra $\rightarrow$ Intro.

fol:ntd:prq:
sec

$$\begin{array}{c}
[\exists x \neg \varphi(x)]^1 \\
\vdots \\
\neg \forall x \varphi(x) \\
1 \frac{}{\exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}$$

Como não há uma regra óbvia para aplicar a $\neg \forall x \varphi(x)$, prosseguiremos montando a **derivação** de modo que possamos usar a regra $\exists$ Elim. Aqui devemos prestar atenção à condição de variável própria e escolher uma constante que não apareça em $\exists x \varphi(x)$ nem em quaisquer suposições das quais ela dependa. (Como, no entanto, nenhum **símbolo de constante** aparece, qualquer escolha servirá.)

$$\begin{array}{c}
[\neg \varphi(a)]^2 \\
\vdots \\
2 \frac{[\exists x \neg \varphi(x)]^1 \quad \neg \forall x \varphi(x)}{\neg \forall x \varphi(x)} \exists \text{Elim} \\
1 \frac{}{\exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}$$

Para derivar $\neg \forall x \varphi(x)$, tentaremos usar a regra $\neg$ Intro: isso exige que derive-mos uma contradição, possivelmente usando $\forall x \varphi(x)$ como suposição adicional. É claro que essa contradição pode envolver a suposição $\neg \varphi(a)$, que será descarregada pela inferência $\exists$ Elim. Podemos montá-la da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}
[\neg \varphi(a)]^2, [\forall x \varphi(x)]^3 \\
\vdots \\
\perp \\
2 \frac{[\exists x \neg \varphi(x)]^1 \quad 3 \frac{}{\neg \forall x \varphi(x)} \neg \text{Intro}}{\neg \forall x \varphi(x)} \exists \text{Elim} \\
1 \frac{}{\exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}$$

Parece que estamos perto de obter uma contradição. A regra mais fácil de aplicar é a $\forall$ Elim, que não possui condição de variável própria. Como podemos usar qualquer termo que queiramos para substituir o x universalmente quantificado, faz mais sentido continuar usando a para chegarmos a uma contradição.

$$\begin{array}{c}
\frac{[\forall x \varphi(x)]^3}{\varphi(a)} \forall \text{Elim} \\
\frac{[\neg \varphi(a)]^2 \quad \varphi(a)}{\perp} \neg \text{Elim} \\
3 \frac{}{\neg \forall x \varphi(x)} \neg \text{Intro} \\
2 \frac{[\exists x \neg \varphi(x)]^1 \quad 3 \frac{}{\neg \forall x \varphi(x)} \neg \text{Intro}}{\neg \forall x \varphi(x)} \exists \text{Elim} \\
1 \frac{}{\exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x)} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}$$

É importante, especialmente ao lidar com quantificadores, verificar com cuidado neste ponto que a condição de variável própria não foi violada. Como a única regra que aplicamos sujeita à condição de variável própria foi $\exists\text{Elim}$, e a variável própria a não ocorre em nenhuma suposição da qual dependa, esta é uma **derivação** correta.

Exemplo ntd.8. Às vezes podemos derivar **a fórmula** a partir de outras **fórmulas**. Nesses casos, podemos ter suposições não descarregadas. É importante acompanhar nossas suposições, bem como o objetivo final.

Vamos ver como daríamos **a derivação** de **fórmula** $\exists x \chi(x, b)$ a partir das suposições $\exists x (\varphi(x) \wedge \psi(x))$ e $\forall x (\psi(x) \rightarrow \chi(x, b))$. Começando como de costume, escrevemos a conclusão na parte inferior.

$$\overline{\exists x \chi(x, b)}$$

Temos duas premissas com as quais trabalhar. Para usar a primeira, isto é, tentar encontrar **a derivação** de $\exists x \chi(x, b)$ a partir de $\exists x (\varphi(x) \wedge \psi(x))$, usariamos a regra $\exists\text{Elim}$. Como ela possui condição de variável própria, aplicaremos essa regra primeiro. Obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{c} [\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1 \\ \vdots \\ \exists x (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \quad \exists x \chi(x, b) \\ 1 \frac{}{\exists x \chi(x, b)} \exists\text{Elim} \end{array}$$

As duas suposições com as quais estamos trabalhando compartilham ψ . Pode ser útil neste ponto aplicar $\wedge\text{Elim}$ para separar $\psi(a)$.

$$\begin{array}{c} [\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1 \\ \psi(a) \\ \vdots \\ \exists x (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \quad \exists x \chi(x, b) \\ 1 \frac{}{\exists x \chi(x, b)} \exists\text{Elim} \end{array}$$

A segunda suposição com a qual temos de trabalhar é $\forall x (\psi(x) \rightarrow \chi(x, b))$. Como não há condição de variável própria, podemos instanciar x com o **símbolo de constante** a usando $\forall\text{Elim}$ para obter $\psi(a) \rightarrow \chi(a, b)$. Agora temos tanto $\psi(a) \rightarrow \chi(a, b)$ quanto $\psi(a)$. Nosso próximo passo deve ser uma aplicação direta da regra $\rightarrow\text{Elim}$.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\forall x (\psi(x) \rightarrow \chi(x, b))}{\psi(a) \rightarrow \chi(a, b)} \forall\text{Elim} \quad \frac{[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1}{\psi(a)} \wedge\text{Elim}}{\chi(a, b)} \rightarrow\text{Elim} \\
\vdots \\
1 \frac{\frac{\exists x (\varphi(x) \wedge \psi(x))}{\exists x \chi(x, b)} \exists\text{Elim} \quad \exists x \chi(x, b)}{\exists x \chi(x, b)} \exists\text{Elim}
\end{array}$$

Estamos quase lá! Uma aplicação de $\exists\text{Intro}$ e atingimos nosso objetivo.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\forall x (\psi(x) \rightarrow \chi(x, b))}{\psi(a) \rightarrow \chi(a, b)} \forall\text{Elim} \quad \frac{[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1}{\psi(a)} \wedge\text{Elim}}{\chi(a, b)} \rightarrow\text{Elim} \\
1 \frac{\frac{\exists x (\varphi(x) \wedge \psi(x))}{\exists x \chi(x, b)} \exists\text{Elim} \quad \frac{\chi(a, b)}{\exists x \chi(x, b)} \exists\text{Intro}}{\exists x \chi(x, b)} \exists\text{Elim}
\end{array}$$

Como garantimos em cada etapa que as condições de variável própria não foram violadas, podemos estar confiantes de que esta é uma **derivação** correta.

Exemplo ntd.9. Dê a **derivação** de **fórmula** $\neg\forall x \varphi(x)$ a partir das suposições $\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y)$ e $\neg\exists y \psi(y)$. Começando como de costume, escrevemos a **fórmula** alvo na parte inferior.

$$\overline{\neg\forall x \varphi(x)}$$

A última linha da **derivação** é uma negação, então vamos tentar usar $\neg\text{Intro}$. Isso exigirá que descubramos como derivar uma contradição.

$$\begin{array}{c}
[\forall x \varphi(x)]^1 \\
\vdots \\
\vdots \\
1 \frac{\perp}{\neg\forall x \varphi(x)} \neg\text{Intro}
\end{array}$$

Até aqui, tudo bem. Podemos usar $\forall\text{Elim}$, mas não é óbvio se isso nos ajudará a alcançar nosso objetivo. Em vez disso, vamos usar uma de nossas suposições. $\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y)$ junto com $\forall x \varphi(x)$ nos permitirá usar a regra $\rightarrow\text{Elim}$.

$$\begin{array}{c}
\frac{\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y) \quad [\forall x \varphi(x)]^1}{\exists y \psi(y)} \rightarrow\text{Elim} \\
\vdots \\
\vdots \\
1 \frac{\perp}{\neg\forall x \varphi(x)} \neg\text{Intro}
\end{array}$$

Agora temos uma suposição final com a qual trabalhar, e parece que isso nos ajudará a chegar a uma contradição usando $\neg$ Elim.

$$\frac{\frac{\neg \exists y \psi(y) \quad \frac{\frac{\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y) \quad [\forall x \varphi(x)]^1}{\exists y \psi(y)} \rightarrow \text{Elim}}{\neg \exists y \psi(y)} \quad \frac{1 \quad \perp}{\neg \forall x \varphi(x)} \neg \text{Intro}}{\neg \text{Elim}}$$

Problema ntd.4. Dê **derivações** que mostrem o seguinte:

1. $\vdash (\forall x \varphi(x) \wedge \forall y \psi(y)) \rightarrow \forall z (\varphi(z) \wedge \psi(z))$.
2. $\vdash (\exists x \varphi(x) \vee \exists y \psi(y)) \rightarrow \exists z (\varphi(z) \vee \psi(z))$.
3. $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi) \vdash \exists y \varphi(y) \rightarrow \psi$.
4. $\forall x \neg \varphi(x) \vdash \neg \exists x \varphi(x)$.
5. $\vdash \neg \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \neg \varphi(x)$.
6. $\vdash \neg \exists x \forall y ((\varphi(x, y) \rightarrow \neg \varphi(y, y)) \wedge (\neg \varphi(y, y) \rightarrow \varphi(x, y)))$.

Problema ntd.5. Dê **derivações** que mostrem o seguinte:

1. $\vdash \neg \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \neg \varphi(x)$.
2. $(\forall x \varphi(x) \rightarrow \psi) \vdash \exists y (\varphi(y) \rightarrow \psi)$.
3. $\vdash \exists x (\varphi(x) \rightarrow \forall y \varphi(y))$.

(Todas exigem a regra $\perp_C$.)

ntd.7 Noções da Teoria da Prova

fol:ntd:ptn:
sec

Esta seção reúne as definições da relação de demonstrabilidade e de consistência para a dedução natural.

explanation Assim como definimos várias noções semânticas importantes (validade, consequência, satisfatibilidade), agora definimos noções *da Teoria da Prova* correspondentes. Elas não são definidas por apelo à satisfação de **sentenças** em **estruturas**, mas por apelo à **derivabilidade** ou **não derivabilidade** de certas **sentenças** a partir de outras. Foi uma descoberta importante que essas noções coincidem. Que coincidem é o conteúdo dos teoremas de *correção* e *completeude*.

Definição ntd.10 (Teoremas). Uma *sentença* φ é um *teorema* se há uma *derivação* de φ em dedução natural na qual todas as hipóteses são *descarregadas*. Escrevemos $\vdash \varphi$ se φ é um teorema e $\nvdash \varphi$ se não o é.

Definição ntd.11 (Derivabilidade). A *sentença* φ é *derivável* de um conjunto de *sentenças* Γ , $\Gamma \vdash \varphi$, se há uma *derivação* com conclusão φ e na qual toda hipótese é ou *descarregada* ou está em Γ . Se φ não é *derivável* de Γ , escrevemos $\Gamma \nvdash \varphi$.

Definição ntd.12 (Consistência). Um conjunto de *sentenças* Γ é *inconsistente* se, e somente se, $\Gamma \vdash \perp$. Se Γ não é inconsistente, isto é, se $\Gamma \nvdash \perp$, dizemos que é *consistente*.

fol:ntd:ptn:
prop:reflexivity

Proposição ntd.13 (Reflexividade). Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Prova. A hipótese φ por si só é uma *derivação* de φ em que toda hipótese *não descarregada* (isto é, φ) está em Γ . $\square$

fol:ntd:ptn:
prop:monotonicity

Proposição ntd.14 (Monotonicidade). Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Delta \vdash \varphi$.

Prova. Qualquer *derivação* de φ a partir de Γ é também uma *derivação* de φ a partir de Δ . $\square$

fol:ntd:ptn:
prop:transitivity

Proposição ntd.15 (Transitividade). Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, há uma *derivação* δ_0 de φ com todas as hipóteses *não descarregadas* em Γ . Se $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então há uma *derivação* δ_1 de ψ com todas as hipóteses *não descarregadas* em $\{\varphi\} \cup \Delta$. Considere agora:

$$\frac{\begin{array}{c} \Delta, [\varphi]^1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \psi \end{array} \quad \frac{}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{Intro} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \quad \frac{}{\varphi} \rightarrow \text{Elim}}{\psi} \rightarrow \text{Elim}$$

As hipóteses *não descarregadas* estão agora todas entre $\Gamma \cup \Delta$, de modo que isto mostra $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. $\square$

Quando $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ é um conjunto finito, podemos usar a notação simplificada $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \vdash \psi$ para $\Gamma \vdash \psi$; em particular, $\varphi \vdash \psi$ significa que $\{\varphi\} \vdash \psi$.

Note que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\varphi \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$. Segue também que se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi_i$ para cada i , então $\Gamma \vdash \psi$.

fol:ntd:ptn:
prop:incons

Proposição ntd.16. As seguintes afirmações são equivalentes.

1. Γ é inconsistente.
2. $\Gamma \vdash \varphi$ para toda *sentença* φ .
3. $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ para alguma *sentença* φ .

Prova. Exercício. □

Problema ntd.6. Prove **Proposição ntd.16**

Proposição ntd.17 (Compacidade).

*fol:ntd:ptn:
prop:proves-compact*

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.
2. Se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então Γ é consistente.

Prova. 1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há uma *derivação* δ de φ a partir de Γ . Seja Γ_0 o conjunto de hipóteses *não descarregadas* de δ . Como toda *derivação* é finita, Γ_0 só pode conter finitamente muitas *sentenças*. Assim, δ é uma *derivação* de φ a partir de um Γ_0 finito $\subseteq \Gamma$.

2. Isto é a contrapositiva de (1) no caso especial $\varphi \equiv \perp$. □

ntd.8 Derivabilidade e Consistência

Estabeleceremos agora várias propriedades da relação de *derivabilidade*. Elas são independentemente interessantes, mas cada uma desempenhará um papel na prova do teorema da completude.

*fol:ntd:prv:
sec*

Proposição ntd.18. Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente, então Γ é inconsistente.

*fol:ntd:prv:
prop:provability-contr*

Prova. Seja a *derivação* de φ a partir de Γ igual a δ_1 e a *derivação* de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ igual a δ_2 . Podemos então derivar:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma, [\varphi]^1 \\
 \vdots \\
 \vdots \delta_2 \\
 \vdots \\
 \perp \\
 1 \frac{}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \Gamma \quad \vdots \delta_1 \\
 \quad \quad \quad \varphi \neg\text{Elim} \\
 \hline
 \perp
 \end{array}$$

Na nova *derivação*, a hipótese φ é *descarregada*, de modo que é uma *derivação* a partir de Γ . □

Proposição ntd.19. $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.

*fol:ntd:prv:
prop:prov-incons*

Prova. Primeiro suponha que $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há uma **derivação** δ_0 de φ a partir de hipóteses **não descarregadas** Γ . Obtemos uma **derivação** de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ da seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \quad \neg\varphi}{\perp} \neg\text{Elim}$$

Agora suponha que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, e seja δ_1 a **derivação** correspondente de $\perp$ a partir de hipóteses **não descarregadas** em $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Obtemos uma **derivação** de φ apenas a partir de Γ usando $\perp_C$:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\neg\varphi]^1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} \perp_C \quad \square$$

Problema ntd.7. Prove que $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente.

fol:ntd:prv: prop:explicit-inc **Proposição ntd.20.** Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$, então Γ é inconsistente.

Prova. Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$. Então há uma **derivação** δ de φ a partir de Γ . Considere esta aplicação simples da regra $\neg$ Elim:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \quad \neg\varphi}{\perp} \neg\text{Elim}$$

Como $\neg\varphi \in \Gamma$, todas as hipóteses **não descarregadas** estão em Γ ; isto mostra que $\Gamma \vdash \perp$. $\square$

fol:ntd:prv: prop:provability-exhaustive **Proposição ntd.21.** Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são ambos inconsistentes, então Γ é inconsistente.

Prova. Há **derivações** δ_1 e δ_2 de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, respectivamente. Podemos então derivar

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\neg\varphi]^2 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\frac{\frac{\perp}{\neg\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \frac{\perp}{\neg\neg\varphi} \neg\text{Intro}}{\perp} \neg\text{Elim}}$$

Como as hipóteses φ e $\neg\varphi$ são **descarregadas**, isto é uma **derivação** de $\perp$ apenas a partir de Γ . Logo Γ é inconsistente. $\square$

ntd.9 Derivabilidade e os Conectivos Proposicionais

explanation Estabelecemos que a relação de **derivabilidade** $\vdash$ da dedução natural é forte o suficiente para estabelecer alguns fatos básicos envolvendo os conectivos proposicionais, tais como $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ e $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ (modus ponens). Esses fatos são necessários para a prova do teorema da completude.

fol:ntd:ppr:
sec

Proposição ntd.22.

1. Tanto $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ quanto $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.
2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

fol:ntd:ppr:
prop:provability-land
fol:ntd:ppr:
prop:provability-land-left
fol:ntd:ppr:
prop:provability-land-right

Prova. 1. Podemos derivar ambos:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge\text{Elim} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge\text{Elim}$$

2. Podemos derivar:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge\text{Intro}$$

$\square$

Proposição ntd.23.

1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ é inconsistente.
2. Tanto $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

fol:ntd:ppr:
prop:provability-lor

Prova. 1. Considere a seguinte **derivação**:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\neg\varphi}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{[\varphi]^1}{\perp} \neg\text{Elim}}{\perp} \quad \frac{\frac{\neg\psi}{\perp} \quad [\psi]^1 \neg\text{Elim}}{\perp} \vee\text{Elim}}{\perp} \end{array}$$

Esta é a **derivação** de $\perp$ a partir das hipóteses não descarregadas $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$ e $\neg\psi$.

2. Podemos derivar ambos:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee\text{Intro} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee\text{Intro}$$

$\square$

Proposição ntd.24.

fol:ntd:ppr:
prop:provability-lif

fol:ntd:ppr:
prop:provability-lif-left
fol:ntd:ppr:
prop:provability-lif-right

1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.
2. Tanto $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Prova. 1. Podemos derivar:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} \rightarrow\text{Elim}$$

2. Isso é mostrado pelas duas **derivações** seguintes:

$$\frac{\neg\varphi \quad [\varphi]^1}{\perp} \neg\text{Elim} \quad \frac{\perp}{\psi} \perp_I \quad 1 \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \quad \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}$$

Note que $\rightarrow\text{Intro}$ pode, mas não precisa, descarregar a hipótese φ . $\square$

ntd.10 Derivabilidade e os Quantificadores

fol:ntd:qpr:
sec O teorema da completude também requer que as regras de dedução natural produzam os fatos sobre $\vdash$ estabelecidos nesta seção. explanation

fol:ntd:qpr:
thm:strong-generalization **Teorema ntd.25.** Se c é uma constante que não ocorre em Γ ou $\varphi(x)$ e $\Gamma \vdash \varphi(c)$, então $\Gamma \vdash \forall x \varphi(x)$.

Prova. Seja δ uma **derivação** de $\varphi(c)$ a partir de Γ . Adicionando uma inferência $\forall\text{Intro}$, obtemos uma **derivação** de $\forall x \varphi(x)$. Como c não ocorre em Γ ou $\varphi(x)$, a condição de variável própria é satisfeita. $\square$

fol:ntd:qpr:
prop:provability-quantifiers

Proposição ntd.26.

1. $\varphi(t) \vdash \exists x \varphi(x)$.
2. $\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(t)$.

Prova. 1. A seguinte é uma **derivação** de $\exists x \varphi(x)$ a partir de $\varphi(t)$:

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x \varphi(x)} \exists\text{Intro}$$

2. A seguinte é uma **derivação** de $\varphi(t)$ a partir de $\forall x \varphi(x)$:

$$\frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(t)} \forall\text{Elim}$$

$\square$

ntd.11 Correção

explanation Um sistema de **derivação**, como a dedução natural, é *correto* se não pode derivar coisas que de fato não seguem. A correção é assim uma espécie de propriedade de segurança garantida para sistemas de **derivação**. Dependendo de qual propriedade da Teoria da Prova está em questão, gostaríamos de saber, por exemplo, que

fol:ntd:sou:
sec

1. toda **sentença derivável** é válida;
2. se uma **sentença é derivável** a partir de outras, ela também é uma consequência delas;
3. se um conjunto de **sentenças** é inconsistente, ele é insatisfatível.

Estas são propriedades importantes de um sistema de **derivação**. Se alguma delas não vale, o sistema de **derivação** é deficiente—ele **deriva** demais. Consequentemente, estabelecer a correção de um sistema de **derivação** é da maior importância.

Teorema ntd.27 (Correção). *Se φ é derivável a partir das hipóteses não descarregadas Γ , então $\Gamma \models \varphi$.*

fol:ntd:sou:
thm:soundness

Prova. Seja δ uma **derivação** de φ . Procedemos por indução no número de inferências em δ .

Para a base da indução, mostramos a afirmação quando o número de inferências é 0. Neste caso, δ consiste apenas de uma única **sentença** φ , isto é, uma hipótese. Essa hipótese é **não descarregada**, pois hipóteses só podem ser **descarregadas** por inferências, e não há inferências. Assim, qualquer **estrutura** $\mathfrak{M}$ que satisfaz todas as hipóteses **não descarregadas** da prova também satisfaz φ .

Agora o passo indutivo. Suponha que δ contém n inferências. A(s) premissa(s) da inferência mais baixa são **derivadas** usando sub-**derivações**, cada uma das quais contém menos de n inferências. Assumimos a hipótese de indução: as premissas da inferência mais baixa seguem das hipóteses **não descarregadas** das sub-**derivações** que terminam nessas premissas. Temos que mostrar que a conclusão φ segue das hipóteses **não descarregadas** de toda a prova.

Distinguimos casos de acordo com o tipo da inferência mais baixa. Primeiro, consideramos as possíveis inferências com apenas uma premissa.

1. Suponha que a última inferência é $\neg$ -Intro: a **derivação** tem a forma

$$\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \\ n \frac{}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \end{array}$$

Pela hipótese de indução, $\perp$ segue das hipóteses **não descarregadas** $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de δ_1 . Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$. Suponha por redução ao absurdo que $\mathfrak{M} \models \Gamma$, mas $\mathfrak{M} \not\models \neg\varphi$, isto é, $\mathfrak{M} \models \varphi$. Isto significaria que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Isto é contrário à nossa hipótese de indução. Logo, $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$.

2. A última inferência é $\wedge$ Elim: há duas variantes: φ ou ψ pode ser inferido da premissa $\varphi \wedge \psi$. Considere o primeiro caso. A **derivação** δ tem este aspecto:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi} \wedge\text{Elim}$$

Pela hipótese de indução, $\varphi \wedge \psi$ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ de δ_1 . Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então $\mathfrak{M} \models \varphi$. Suponha $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Pela nossa hipótese de indução ($\Gamma \models \varphi \wedge \psi$), sabemos que $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$. Por definição, $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $\mathfrak{M} \models \varphi$ e $\mathfrak{M} \models \psi$. (O caso em que ψ é inferido de $\varphi \wedge \psi$ é tratado de forma similar.)

3. A última inferência é $\vee$ Intro: há duas variantes: $\varphi \vee \psi$ pode ser inferido da premissa φ ou da premissa ψ . Considere o primeiro caso. A **derivação** tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ de δ_1 . Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$. Suponha $\mathfrak{M} \models \Gamma$; então $\mathfrak{M} \models \varphi$, pois $\Gamma \models \varphi$ (a hipótese de indução). Logo também deve ser o caso que $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$. (O caso em que $\varphi \vee \psi$ é inferido de ψ é tratado de forma similar.)

4. A última inferência é $\rightarrow$ Intro: $\varphi \rightarrow \psi$ é inferido de uma subprova com hipótese φ e conclusão ψ , isto é,

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, ψ segue das hipóteses **não descarregadas** de δ_1 , isto é, $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$. Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. As hipóteses **não descarregadas** de δ são apenas Γ , pois φ é descartada na última inferência. Precisamos mostrar que $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$. Por redução ao absurdo, suponha que para alguma **estrutura** $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models \Gamma$ mas $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi$. Assim, $\mathfrak{M} \models \varphi$ e $\mathfrak{M} \not\models \psi$. Mas por hipótese, ψ é uma consequência de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, isto é, $\mathfrak{M} \models \psi$, o que é uma contradição. Logo, $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

5. A última inferência é $\perp_I$: aqui, δ termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} \perp_I$$

Pela hipótese de indução, $\Gamma \models \perp$. Temos que mostrar que $\Gamma \models \varphi$. Suponha o contrário; então para algum $\mathfrak{M}$ temos $\mathfrak{M} \models \Gamma$ e $\mathfrak{M} \not\models \varphi$. Mas sempre temos $\mathfrak{M} \models \perp$, de modo que isto significaria que $\Gamma \not\models \perp$, contrariando a hipótese de indução.

6. A última inferência é $\perp_C$: Exercício.
7. A última inferência é $\forall\text{Intro}$: então δ tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi(a) \end{array}}{\forall x \varphi(x)} \forall\text{Intro}$$

A premissa $\varphi(a)$ é consequência das hipóteses **não descarregadas** Γ pela hipótese de indução. Considere alguma estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Precisamos mostrar que $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$. Como $\forall x \varphi(x)$ é **a sentença**, isto significa que temos que mostrar que para toda atribuição de variáveis s , $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ (??). Como Γ consiste inteiramente em sentenças, $\mathfrak{M}, s \models \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$ por ???. Seja $\mathfrak{M}'$ como $\mathfrak{M}$, exceto que $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$. Como a não ocorre em Γ , $\mathfrak{M}' \models \Gamma$ por ???. Como $\Gamma \models \varphi(a)$, $\mathfrak{M}' \models \varphi(a)$. Como $\varphi(a)$ é **a sentença**, $\mathfrak{M}', s \models \varphi(a)$ por ???. $\mathfrak{M}', s \models \varphi(x)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}' \models \varphi(a)$ por ??? (lembre que $\varphi(a)$ é apenas $\varphi(x)[a/x]$). Assim, $\mathfrak{M}', s \models \varphi(x)$. Como a não ocorre em $\varphi(x)$, por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$. Mas s foi uma atribuição de variáveis arbitrária, de modo que $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$.

8. A última inferência é $\exists\text{Intro}$: Exercício.
9. A última inferência é $\forall\text{Elim}$: Exercício.

Agora consideremos as possíveis inferências com várias premissas: $\vee$ Elim, $\wedge$ Intro, $\rightarrow$ Elim, e $\exists$ Elim.

1. A última inferência é $\wedge$ Intro. $\varphi \wedge \psi$ é inferido das premissas φ e ψ e δ tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_1 de δ_1 e ψ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_2 de δ_2 . As hipóteses **não descarregadas** de δ são $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, de modo que temos que mostrar que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \varphi \wedge \psi$. Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Como $\mathfrak{M} \models \Gamma_1$, deve ser o caso que $\mathfrak{M} \models \varphi$, pois $\Gamma_1 \models \varphi$, e como $\mathfrak{M} \models \Gamma_2$, $\mathfrak{M} \models \psi$, pois $\Gamma_2 \models \psi$. Juntas, $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$.

2. A última inferência é $\vee$ Elim: Exercício.
3. A última inferência é $\rightarrow$ Elim. ψ é inferido das premissas $\varphi \rightarrow \psi$ e φ . A **derivação** δ tem este aspecto:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}{\psi} \rightarrow \text{Elim}$$

Pela hipótese de indução, $\varphi \rightarrow \psi$ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_1 de δ_1 e φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_2 de δ_2 . Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, então $\mathfrak{M} \models \psi$. Suponha $\mathfrak{M} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Como $\Gamma_1 \models \varphi \rightarrow \psi$, $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$. Como $\Gamma_2 \models \varphi$, temos $\mathfrak{M} \models \varphi$. Isto significa que $\mathfrak{M} \models \psi$ (pois se $\mathfrak{M} \not\models \psi$, como $\mathfrak{M} \models \varphi$, teríamos $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi$, contradizendo $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$).

4. A última inferência é $\neg$ Elim: Exercício.
5. A última inferência é $\exists$ Elim: Exercício. □

Problema ntd.8. Complete a prova de **Teorema ntd.27**.

Corolário ntd.28. *Se $\vdash \varphi$, então φ é válida.*

fol:ntd:sou:
cor:weak-soundness

Corolário ntd.29. *Se Γ é satisfatível, então é consistente.*

fol:ntd:sou:
cor:consistency-soundness

Prova. Provamos a contrapositiva. Suponha que Γ não é consistente. Então $\Gamma \vdash \perp$, isto é, há uma **derivação** de $\perp$ a partir de hipóteses **não descarregadas** em Γ . Por **Teorema ntd.27**, qualquer **estrutura** $\mathfrak{M}$ que satisfaz Γ deve satisfazer $\perp$. Como $\mathfrak{M} \not\models \perp$ para toda **estrutura** $\mathfrak{M}$, nenhuma $\mathfrak{M}$ pode satisfazer Γ , isto é, Γ não é satisfatível. $\square$

ntd.12 Derivações com Predicado de identidade

As **Derivações** com **predicado de identidade** requerem regras de inferência adicionais.

fol:ntd:ide:
sec

$\frac{}{t = t} =\text{Intro}$	$\frac{t_1 = t_2 \quad \varphi(t_1)}{\varphi(t_2)} =\text{Elim}$ $\frac{t_1 = t_2 \quad \varphi(t_2)}{\varphi(t_1)} =\text{Elim}$
--------------------------------	---

Nas regras acima, t , t_1 e t_2 são termos fechados. A regra =Intro nos permite derivar qualquer afirmação de identidade da forma $t = t$ diretamente, sem hipóteses.

Exemplo ntd.30. Se s e t são termos fechados, então $\varphi(s), s = t \vdash \varphi(t)$:

$$\frac{s = t \quad \varphi(s)}{\varphi(t)} =\text{Elim}$$

Isto pode ser familiar como o “princípio da substituibilidade dos identicos”, ou Lei de Leibniz.

Problema ntd.9. Prove que $=$ é simétrica e transitiva, isto é, dê **derivações** de $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$ e $\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

Exemplo ntd.31. **Derivamos** a **sentença**

$$\forall x \forall y ((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \rightarrow x = y)$$

a partir da **sentença**

$$\exists x \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x)$$

Desenvolvemos a **derivação** de trás para frente:

$$\begin{array}{c} \exists x \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x) \quad [\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1 \\ \vdots \\ a = b \\ \hline 1 \frac{a = b}{((\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \rightarrow a = b)} \rightarrow\text{Intro} \\ \hline \frac{((\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \rightarrow a = b)}{\forall y ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \rightarrow a = y)} \forall\text{Intro} \\ \hline \frac{\forall y ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \rightarrow a = y)}{\forall x \forall y ((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \rightarrow x = y)} \forall\text{Intro} \end{array}$$

Agora teremos que usar a hipótese principal: como é uma **fórmula** existencial, usamos $\exists$ Elim para derivar a conclusão intermediária $a = b$.

$$\begin{array}{c}
[\forall y (\varphi(y) \rightarrow y = c)]^2 \\
[\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1 \\
\vdots \\
\vdots \\
\frac{\exists x \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x) \quad a = b}{\exists \text{Elim}} \\
\frac{1 \quad \frac{a = b}{((\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \rightarrow a = b)} \rightarrow \text{Intro}}{\forall y ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \rightarrow a = y)} \forall \text{Intro} \\
\frac{\forall y ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \rightarrow a = y)}{\forall x \forall y ((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \rightarrow x = y)} \forall \text{Intro}
\end{array}$$

A sub-**derivação** no canto superior direito é completada usando suas hipóteses para mostrar que $a = c$ e $b = c$. Isso requer duas **derivações** separadas. A **derivação** para $a = c$ é a seguinte:

$$\frac{\frac{[\forall y (\varphi(y) \rightarrow y = c)]^2}{\varphi(a) \rightarrow a = c} \forall\text{Elim} \quad \frac{[\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1}{\varphi(a)} \wedge\text{Elim}}{a = c} \rightarrow\text{Elim}$$

De $a = c$ e $b = c$ **derivamos** $a = b$ por =Elim.

Problema ntd.10. Dê **derivacões** das seguintes **fórmulas**:

1. $\forall x \forall y ((x = y \wedge \varphi(x)) \rightarrow \varphi(y))$
2. $\exists x \varphi(x) \wedge \forall y \forall z ((\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists x (\varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x))$

ntd.13 Correção com Predicado de identidade

fol:ntd:sid:
sec

Proposição ntd.32. *A dedução natural com regras para $=$ é correta.*

Prova. Qualquer fórmula da forma $t = t$ é válida, pois para toda estrutura $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models t = t$. (Note que assumimos que o termo t é fechado, isto é, não contém variáveis, de modo que as atribuições de variáveis são irrelevantes).

Suponha que a última inferência em uma **derivação** é =Elim, isto é, a **derivação** tem a seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \vdots & \vdots \\ \delta_1 & \delta_2 \\ \vdots & \vdots \\ t_1 = t_2 & \varphi(t_1) \end{array}}{\varphi(t_2)} = \text{Elim}$$

As premissas $t_1 = t_2$ e $\varphi(t_1)$ são **derivadas** a partir de hipóteses **não descarregadas** Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. Queremos mostrar que $\varphi(t_2)$ segue de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Considere uma **estrutura** $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M} \models \varphi(t_1)$ e $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$. Portanto, $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Seja s qualquer atribuição de variáveis e $m = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t_1)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \varphi(x)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t_2)$. Como $\mathfrak{M} \models \varphi(t_1)$, temos $\mathfrak{M} \models \varphi(t_2)$. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas