

ntd.1 Derivações com Predicado de identidade

fol:ntd:ide: As **Derivações** com **predicado de identidade** requerem regras de inferência adicionais.
sec

$\frac{}{t = t} =\text{Intro}$	$\frac{t_1 = t_2 \quad \varphi(t_1)}{\varphi(t_2)} =\text{Elim}$
	$\frac{t_1 = t_2 \quad \varphi(t_2)}{\varphi(t_1)} =\text{Elim}$

Nas regras acima, t , t_1 e t_2 são termos fechados. A regra =Intro nos permite derivar qualquer afirmação de identidade da forma $t = t$ diretamente, sem hipóteses.

Exemplo ntd.1. Se s e t são termos fechados, então $\varphi(s), s = t \vdash \varphi(t)$:

$$\frac{s = t \quad \varphi(s)}{\varphi(t)} =\text{Elim}$$

Isto pode ser familiar como o “princípio da substituíbilidade dos idênticos”, ou Lei de Leibniz.

Problema ntd.1. Prove que $=$ é simétrica e transitiva, isto é, dê **derivações** de $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$ e $\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

Exemplo ntd.2. **Derivamos** a **sentença**

$$\forall x \forall y ((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \rightarrow x = y)$$

a partir da **sentença**

$$\exists x \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x)$$

Desenvolvemos a **derivação** de trás para frente:

$$\begin{array}{c} \exists x \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x) \quad [\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1 \\ \vdots \\ \frac{a = b}{((\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \rightarrow a = b)} \rightarrow\text{Intro} \\ \frac{((\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \rightarrow a = b)}{\forall y ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \rightarrow a = y)} \forall\text{Intro} \\ \frac{\forall y ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \rightarrow a = y)}{\forall x \forall y ((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \rightarrow x = y)} \forall\text{Intro} \end{array}$$

Agora teremos que usar a hipótese principal: como é uma **fórmula** existencial, usamos $\exists\text{Elim}$ para derivar a conclusão intermediária $a = b$.

$$\begin{array}{c}
[\forall y (\varphi(y) \rightarrow y = c)]^2 \\
[\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1 \\
\vdots \\
\vdots \\
\frac{\exists x \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x) \quad a = b}{\exists \text{Elim}} \\
\frac{1 \quad \frac{a = b}{((\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \rightarrow a = b)} \rightarrow \text{Intro}}{\forall y ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \rightarrow a = y)} \forall \text{Intro} \\
\frac{\forall y ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \rightarrow a = y)}{\forall x \forall y ((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \rightarrow x = y)} \forall \text{Intro}
\end{array}$$

A sub-**derivação** no canto superior direito é completada usando suas hipóteses para mostrar que $a = c$ e $b = c$. Isso requer duas **derivações** separadas. A **derivação** para $a = c$ é a seguinte:

$$\frac{\frac{[\forall y (\varphi(y) \rightarrow y = c)]^2}{\varphi(a) \rightarrow a = c} \forall\text{Elim} \quad \frac{[\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1}{\varphi(a)} \wedge\text{Elim}}{a = c} \rightarrow\text{Elim}$$

De $a = c$ e $b = c$ **derivamos** $a = b$ por $=$ Elim.

Problema ntd.2. Dê **derivações** das seguintes **fórmulas**:

1. $\forall x \forall y ((x = y \wedge \varphi(x)) \rightarrow \varphi(y))$
2. $\exists x \varphi(x) \wedge \forall y \forall z ((\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists x (\varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x))$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas