

ntd.1 Derivações

fol:ntd:der: Já dissemos o que é uma hipótese e demos as regras de inferência. **Derivações** explanation
sec em dedução natural são geradas indutivamente a partir disso: cada **derivação**
ou é uma hipótese por si só, ou consiste em uma, duas ou três **derivações**
seguidas de uma inferência correta.

Definição ntd.1 (Derivação). A **derivação** de a **sentença** φ a partir de hipóteses Γ é uma árvore finita de **sentenças** que satisfaz as seguintes condições:

1. As **sentenças** no topo da árvore ou estão em Γ ou são **descarregadas** por uma inferência na árvore.
2. A **sentença** na base da árvore é φ .
3. Toda **sentença** na árvore exceto a sentença φ na base é uma premissa de uma aplicação correta de uma regra de inferência cuja conclusão está diretamente abaixo daquela **sentença** na árvore.

Dizemos então que φ é a **conclusão** da **derivação** e Γ , suas hipóteses **não descarregadas**.

Se existe a **derivação** de φ a partir de Γ , dizemos que φ é **derivável** a partir de Γ , ou, em símbolos: $\Gamma \vdash \varphi$. Se há a **derivação** de φ em que toda hipótese é **descarregada**, escrevemos $\vdash \varphi$.

Exemplo ntd.2. Toda hipótese por si só é a **derivação**. Assim, por exemplo, φ por si só é a **derivação**, e ψ por si só também. Podemos obter uma nova **derivação** a partir delas aplicando, digamos, a regra $\wedge$ Intro,

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{Intro}$$

Essas regras devem ser gerais: podemos substituir o φ e ψ nela por quaisquer **sentenças**, por exemplo, por χ e θ . Então a conclusão seria $\chi \wedge \theta$, e assim

$$\frac{\chi \quad \theta}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro}$$

é uma **derivação** correta. É claro que também podemos trocar as hipóteses, de modo que θ desempenhe o papel de φ e χ o de ψ . Assim,

$$\frac{\theta \quad \chi}{\theta \wedge \chi} \wedge \text{Intro}$$

também é uma **derivação** correta.

Podemos agora aplicar outra regra, digamos, $\rightarrow$ Intro, que nos permite concluir um condicional e nos permite descarregar qualquer hipótese que seja idêntica ao antecedente desse condicional. Assim, ambas as seguintes seriam **derivações** corretas:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\chi]^1 \quad \theta}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro} \\
1 \frac{\quad}{\chi \rightarrow (\chi \wedge \theta)} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\frac{\chi \quad [\theta]^1}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro} \\
1 \frac{\quad}{\theta \rightarrow (\chi \wedge \theta)} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}$$

Elas mostram, respectivamente, que $\theta \vdash \chi \rightarrow (\chi \wedge \theta)$ e $\chi \vdash \theta \rightarrow (\chi \wedge \theta)$.

Lembre-se de que descarregar hipóteses é uma permissão, não uma exigência: não temos de descarregar as hipóteses. Em particular, podemos aplicar uma regra mesmo que as hipóteses não estejam presentes na **derivação**. Por exemplo, o seguinte é válido, embora não haja hipótese φ a ser **descarregada**:

$$1 \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{Intro}$$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas