

mat.1 Exemplos de Teorias de Primeira Ordem

fol:mat:the:
sec

Exemplo mat.1. A teoria das ordens lineares estritas na linguagem $\mathcal{L}_<$ é axiomatizada pelo conjunto

$$\{ \quad \forall x \neg x < x, \\ \forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y), \\ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \quad \}$$

Ela captura completamente as **estruturas** pretendidas: toda ordem linear estrita é um modelo deste sistema de axiomas e, vice-versa, se R é uma ordem linear sobre um conjunto X , então a estrutura $\mathfrak{M}$ com $|\mathfrak{M}| = X$ e $<^{\mathfrak{M}} = R$ é um modelo desta teoria.

Exemplo mat.2. A teoria dos grupos na linguagem $\mathbf{1}$ (**símbolo de constante**), $\cdot$ (**símbolo de função** de dois lugares) é axiomatizada por

$$\begin{aligned} \forall x (x \cdot \mathbf{1}) &= x \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z)) &= ((x \cdot y) \cdot z) \\ \forall x \exists y (x \cdot y) &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Exemplo mat.3. A teoria da aritmética de Peano é axiomatizada pelas seguintes sentenças na linguagem da aritmética $\mathcal{L}_A$.

$$\begin{aligned} \forall x \forall y (x' = y' \rightarrow x = y) \\ \forall x \mathbf{0} \neq x' \\ \forall x (x + \mathbf{0}) &= x \\ \forall x \forall y (x + y') &= (x + y)' \\ \forall x (x \times \mathbf{0}) &= \mathbf{0} \\ \forall x \forall y (x \times y') &= ((x \times y) + x) \\ \forall x \forall y (x < y \leftrightarrow \exists z (z' + x) &= y) \end{aligned}$$

mais todas as sentenças da forma

$$(\varphi(\mathbf{0}) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x'))) \rightarrow \forall x \varphi(x)$$

Como há infinitas sentenças desta última forma, este sistema de axiomas é infinito. Esta última forma é chamada de *esquema de indução*. (Na verdade, o esquema de indução é um pouco mais complicado do que deixamos transparecer aqui.)

O último axioma é uma *definição explícita* de $<$.

Exemplo mat.4. A teoria dos conjuntos puros desempenha um papel importante nos fundamentos (e na filosofia) da matemática. Um conjunto é puro se

todos os seus **membros** são também conjuntos puros. O conjunto vazio conta, portanto, como puro, mas um conjunto que tem como **um membro** algo que não é um conjunto não seria puro. Então os conjuntos puros são aqueles que são formados apenas a partir do conjunto vazio e sem “urelementos”, isto é, objetos que não são, eles próprios, conjuntos.

O seguinte poderia ser considerado um sistema de axiomas para uma teoria dos conjuntos puros:

$$\begin{aligned} \exists x \neg \exists y y \in x \\ \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \\ \forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)) \\ \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (z \in u \wedge u \in x)) \end{aligned}$$

mais todas as sentenças da forma

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \varphi(y))$$

O primeiro axioma diz que há um conjunto sem **membros** (isto é, $\emptyset$ existe); o segundo diz que conjuntos são extensionais; o terceiro que, para quaisquer conjuntos X e Y , o conjunto $\{X, Y\}$ existe; o quarto que, para qualquer conjunto X , o conjunto $\cup X$ existe, onde $\cup X$ é a união de todos os elementos de X .

As **sentenças** mencionadas por último são chamadas coletivamente de *esquema de compreensão ingênuo*. Ele essencialmente diz que, para todo $\varphi(x)$, o conjunto $\{x : \varphi(x)\}$ existe—então, à primeira vista, um axioma verdadeiro, útil e talvez até necessário. É chamado de “ingênuo” porque, como se vê, ele torna esta teoria insatisfatória: se você toma $\varphi(y)$ como $\neg y \in y$, obtém a **sentença**

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \neg y \in y)$$

e esta **sentença** não é satisfeita em nenhuma **estrutura**.

Exemplo mat.5. Na área da *mereologia*, a relação de *parte* é uma relação fundamental. Assim como as teorias de conjuntos, há teorias de parte que axiomatizam várias concepções (às vezes conflitantes) dessa relação.

A linguagem da mereologia contém um único símbolo de predicado de dois lugares P , e $P(x, y)$ “significa” que x é uma parte de y . Quando temos essa interpretação em mente, a **estrutura** para essa linguagem é chamada de *estrutura de parte*. É claro que nem toda estrutura para um único predicado de dois lugares realmente merecerá esse nome. Para ter uma chance de capturar “parte”, P^M deve satisfazer algumas condições, que podemos estabelecer como axiomas para uma teoria de parte. Por exemplo, a parte é uma ordem parcial sobre objetos: todo objeto é uma parte (ainda que uma parte *imprópria*) de si mesmo; dois objetos diferentes não podem ser partes um do outro; uma parte de uma parte de um objeto é, ela própria, parte daquele objeto. Note que, nesse sentido, “é uma parte de” se assemelha a “é um subconjunto de”, mas

não se assemelha a “é um elemento de”, que não é nem reflexiva nem transitiva.

$$\begin{aligned}\forall x P(x, x) \\ \forall x \forall y ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow x = y) \\ \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))\end{aligned}$$

Além disso, quaisquer dois objetos têm uma soma mereológica (um objeto que tem esses dois objetos como partes, e é minimal nesse aspecto).

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (P(z, u) \leftrightarrow (P(x, u) \wedge P(y, u)))$$

Estes são apenas alguns dos princípios básicos de parte considerados pelos metafísicos. Princípios adicionais, no entanto, rapidamente se tornam difíceis de formular ou escrever sem primeiro introduzir algumas relações definidas. Por exemplo, a maioria dos metafísicos interessados em mereologia também considera o seguinte como um princípio válido: sempre que um objeto x tem uma parte própria y , ele também tem uma parte z que não tem partes em comum com y , e tal que a fusão de y e z é x .

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas