

mat.1 Expressando o Tamanho de Estruturas

fol:mat:siz: sec Há algumas propriedades de estruturas que podemos expressar mesmo sem explanation usar os símbolos não lógicos de uma linguagem. Por exemplo, há **sentenças** que são verdadeiras em **a estrutura** se, e somente se, o **domínio** da **estrutura** tem pelo menos, no máximo ou exatamente um certo número n de **membros**.

Proposição mat.1. A **sentença**

$$\begin{aligned} \varphi_{\geq n} \equiv \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge \dots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge \dots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \\ x_{n-1} \neq x_n) \end{aligned}$$

é verdadeira em **a estrutura** $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém pelo menos n **membros**. Consequentemente, $\mathfrak{M} \models \neg \varphi_{\geq n+1}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém no máximo n **membros**.

Proposição mat.2. A **sentença**

$$\begin{aligned} \varphi_{=n} \equiv \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge \dots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge \dots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \\ x_{n-1} \neq x_n \wedge \\ \forall y (y = x_1 \vee \dots \vee y = x_n)) \end{aligned}$$

é verdadeira em **a estrutura** $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém exatamente n **membros**.

Proposição mat.3. Uma **estrutura** é infinita se, e somente se, é um modelo de

$$\{\varphi_{\geq 1}, \varphi_{\geq 2}, \varphi_{\geq 3}, \dots\}.$$

Não há uma única sentença puramente lógica que seja verdadeira em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ é infinito. No entanto, pode-se dar **sentenças** com **símbolos de predicado** não lógicos que só têm modelos infinitos (embora nem toda **estrutura** infinita seja modelo delas). A propriedade de ser uma estrutura finita e a propriedade de ser uma estrutura **não enumerável** nem sequer podem ser expressas com um conjunto infinito de **sentenças**. Estes fatos seguem dos teoremas da compacidade e de Löwenheim–Skolem.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas