

mat.1 A Teoria dos Conjuntos

fol:mat:set:
sec

Quase toda a matemática pode ser desenvolvida na teoria dos conjuntos. Desenvolver a matemática nessa teoria envolve uma série de coisas. Primeiro, requer um conjunto de axiomas para a relação $\in$. Vários sistemas de axiomas diferentes foram desenvolvidos, às vezes com propriedades conflitantes de $\in$. O sistema de axiomas conhecido como **ZFC**, a teoria dos conjuntos de Zermelo–Fraenkel com o axioma da escolha, destaca-se: é de longe o mais amplamente usado e estudado, porque acontece que seus axiomas bastam para provar quase todas as coisas que os matemáticos esperam ser capazes de provar. Mas antes que isso possa ser estabelecido, é primeiro necessário deixar claro como podemos sequer *expressar* todas as coisas que os matemáticos gostariam de expressar. Para começar, a linguagem não contém **símbolos de constante** nem **símbolos de função**, então parece, à primeira vista, pouco claro que possamos falar sobre conjuntos particulares (como $\emptyset$ ou $\mathbb{N}$), falar sobre operações sobre conjuntos (como $X \cup Y$ e $\wp(X)$), muito menos outras construções que envolvem coisas diferentes de conjuntos, como relações e funções.

Para começar, “é um elemento de” não é a única relação na qual estamos interessados: “é um subconjunto de” parece quase tão importante. Mas nós podemos *definir* “é um subconjunto de” em termos de “é um elemento de”. Para fazer isso, temos que encontrar **a fórmula** $\varphi(x, y)$ na linguagem da teoria dos conjuntos que é satisfeita por um par de conjuntos $\langle X, Y \rangle$ sse $X \subseteq Y$. Mas X é um subconjunto de Y exatamente quando todos os **membros** de X são também **membros** de Y . Então podemos definir $\subseteq$ pela fórmula

$$\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$$

Agora, sempre que quisermos usar a relação $\subseteq$ em uma fórmula, nós poderíamos, em vez disso, usar aquela fórmula (com x e y adequadamente substituídos, e a variável ligada z renomeada se necessário). Por exemplo, a extensionalidade dos conjuntos significa que se quaisquer conjuntos x e y estão contidos um no outro, então x e y devem ser o mesmo conjunto. Isso pode ser expresso por $\forall x \forall y ((x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow x = y)$, ou, se substituirmos $\subseteq$ pela definição acima, por

$$\forall x \forall y ((\forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \wedge \forall z (z \in y \rightarrow z \in x)) \rightarrow x = y).$$

Este é, de fato, um dos axiomas de **ZFC**, o “axioma da extensionalidade”.

Não há **símbolo de constante** para $\emptyset$, mas podemos expressar “ x é vazio” por $\neg \exists y y \in x$. Então “ $\emptyset$ existe” torna-se a **sentença** $\exists x \neg \exists y y \in x$. Este é outro axioma de **ZFC**. (Note que o axioma da extensionalidade implica que há apenas um conjunto vazio.) Sempre que quisermos falar sobre $\emptyset$ na linguagem da teoria dos conjuntos, nós escreveríamos isso como “há um conjunto que é vazio e . . .” Como exemplo, para expressar o fato de que $\emptyset$ é um subconjunto de todo conjunto, poderíamos escrever

$$\exists x (\neg \exists y y \in x \wedge \forall z x \subseteq z)$$

onde, é claro, $x \subseteq z$ teria, por sua vez, que ser substituído por sua definição.

Para falar sobre operações sobre conjuntos, como $X \cup Y$ e $\wp(X)$, nós temos que usar um truque semelhante. Não há símbolos de função na linguagem da teoria dos conjuntos, mas podemos expressar as relações funcionais $X \cup Y = Z$ e $\wp(X) = Y$ por

$$\begin{aligned} \forall u ((u \in x \vee u \in y) \leftrightarrow u \in z) \\ \forall u (u \subseteq x \leftrightarrow u \in y) \end{aligned}$$

já que os **membros** de $X \cup Y$ são exatamente os conjuntos que são ou **membros** de X ou **membros** de Y , e os **membros** de $\wp(X)$ são exatamente os subconjuntos de X . No entanto, isso não nos permite usar $x \cup y$ ou $\wp(x)$ como se fossem termos: só podemos usar as **fórmulas** inteiras que definem as relações $X \cup Y = Z$ e $\wp(X) = Y$. De fato, não sabemos que essas relações são alguma vez satisfeitas, isto é, não sabemos que uniões e conjuntos potência sempre existem. Por exemplo, a **sentença** $\forall x \exists y \wp(x) = y$ é outro axioma de **ZFC** (o axioma do conjunto potência).

E quanto a falar de pares ordenados ou funções? Aqui temos que explicar como podemos pensar em pares ordenados e funções como tipos especiais de conjuntos. Uma maneira de definir o par ordenado $\langle x, y \rangle$ é como o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Mas, como antes, não podemos introduzir **a símbolo de função** que nomeie esse conjunto; só podemos definir a relação $\langle x, y \rangle = z$, isto é, $\{\{x\}, \{x, y\}\} = z$:

$$\forall u (u \in z \leftrightarrow (\forall v (v \in u \leftrightarrow v = x) \vee \forall v (v \in u \leftrightarrow (v = x \vee v = y))))$$

Isso diz que os **membros** u de z são exatamente aqueles conjuntos que ou têm x como seu único **membro** ou têm x e y como seus únicos **membros** (em outras palavras, aqueles conjuntos que são ou idênticos a $\{x\}$ ou idênticos a $\{x, y\}$). Uma vez que temos isso, podemos dizer outras coisas, por exemplo, que $X \times Y = Z$:

$$\forall z (z \in Z \leftrightarrow \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y \rangle = z))$$

Uma função $f: X \rightarrow Y$ pode ser pensada como a relação $f(x) = y$, isto é, como o conjunto de pares $\{\langle x, y \rangle : f(x) = y\}$. Nós podemos então dizer que um conjunto f é uma função de X em Y se (a) é uma relação $\subseteq X \times Y$, (b) é total, isto é, para todo $x \in X$ há algum $y \in Y$ tal que $\langle x, y \rangle \in f$ e (c) é funcional, isto é, sempre que $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f$, $y = y'$ (porque os valores de funções devem ser únicos). Então “ f é uma função de X em Y ” pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \forall u (u \in f \rightarrow \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y \rangle = u)) \wedge \\ \forall x (x \in X \rightarrow (\exists y (y \in Y \wedge \text{mapeia}(f, x, y)) \wedge \\ (\forall y \forall y' ((\text{mapeia}(f, x, y) \wedge \text{mapeia}(f, x, y')) \rightarrow y = y')))) \end{aligned}$$

onde $\text{mapeia}(f, x, y)$ abrevia $\exists v (v \in f \wedge \langle x, y \rangle = v)$ (esta **fórmula** expressa “ $f(x) = y$ ”).

Agora também não é difícil expressar que $f: X \rightarrow Y$ é **injetiva**, por exemplo:

$$f: X \rightarrow Y \wedge \forall x \forall x' ((x \in X \wedge x' \in X \wedge \exists y (\text{mapeia}(f, x, y) \wedge \text{mapeia}(f, x', y))) \rightarrow x = x')$$

Uma função $f: X \rightarrow Y$ é **injetiva** sse, sempre que f mapeia $x, x' \in X$ para um único y , $x = x'$. Se abreviarmos esta fórmula como $\text{inj}(f, X, Y)$, já estamos em posição de afirmar na linguagem da teoria dos conjuntos algo tão não trivial quanto o teorema de Cantor: não há função **injetiva** de $\wp(X)$ em X :

$$\forall X \forall Y (\wp(X) = Y \rightarrow \neg \exists f \text{inj}(f, Y, X))$$

Poderíamos pensar que a teoria dos conjuntos requer outro axioma que garanta a existência de um conjunto para toda propriedade definidora. Se $\varphi(x)$ é uma fórmula da teoria dos conjuntos com a variável x livre, podemos considerar a **sentença**

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Esta **sentença** afirma que há um conjunto y cujos **membros** são todos e somente aqueles x que satisfazem $\varphi(x)$. Este esquema é chamado de “princípio da compreensão”. Parece muito útil; infelizmente é inconsistente. Tome $\varphi(x) \equiv \neg x \in x$, então o princípio da compreensão afirma

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x),$$

isto é, afirma a existência de um conjunto de todos os conjuntos que não são **membros** de si mesmos. Nenhum tal conjunto pode existir—este é o Paradoxo de Russell. **ZFC**, de fato, contém uma versão restrita—e consistente—deste princípio, o princípio da separação:

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x))).$$

Problema mat.1. Mostre que o princípio da compreensão é inconsistente dando a **derivação** que mostre

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x) \vdash \perp.$$

Pode ajudar mostrar primeiro $(A \rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \rightarrow A) \vdash \perp$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas