

Capítulo udf

Teorias e Seus Modelos

mat.1 Introdução

fol:mat:int:
sec

O desenvolvimento do método axiomático é uma conquista significativa na história da ciência, e é de especial importância na história da matemática. Um desenvolvimento axiomático de um campo envolve o esclarecimento de muitas questões: Do que trata o campo? Quais são os conceitos mais fundamentais? Como eles se relacionam? Todos os conceitos do campo podem ser definidos em termos desses conceitos fundamentais? Que leis esses conceitos obedecem, e devem obedecer?

explanation

O método axiomático e a lógica foram feitos um para o outro. A lógica formal fornece as ferramentas para formular teorias axiomáticas, para provar teoremas a partir dos axiomas da teoria de uma maneira precisamente especificada, para estudar as propriedades de todos os sistemas que satisfazem os axiomas de uma maneira sistemática.

Definição mat.1. Um conjunto de **sentenças** Γ é *fechado* sse, sempre que $\Gamma \models \varphi$ então $\varphi \in \Gamma$. O *fecho* de um conjunto de **sentenças** Γ é $\{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$.

Dizemos que Γ é *axiomatizado por* um conjunto de sentenças Δ se Γ é o fecho de Δ .

Podemos pensar em uma teoria axiomática como o conjunto de sentenças que é axiomatizado por seu conjunto de axiomas Δ . Em outras palavras, quando temos uma linguagem de primeira ordem que contém símbolos não lógicos para os primitivos da ciência desenvolvida axiomáticamente que desejamos estudar, juntamente com um conjunto de **sentenças** que expressam as leis fundamentais da ciência, podemos pensar na teoria como representada por todas as **sentenças** nessa linguagem que são consequência dos axiomas. Isso varia de exemplos simples com apenas um único primitivo e axiomas simples, como a teoria das ordens parciais, até teorias complexas como a mecânica newtoniana.

explanation

Os fatos lógicos importantes que tornam essa abordagem formal do método axiomático tão importante são os seguintes. Suponha que Γ é um sistema de axiomas para uma teoria, isto é, um conjunto de sentenças.

1. Podemos afirmar precisamente quando um sistema de axiomas captura uma classe pretendida de **estruturas**. Isto é, se estamos interessados em uma certa classe de **estruturas**, capturaremos com sucesso essa classe por um sistema de axiomas Γ sse as **estruturas** são exatamente aquelas $\mathfrak{M}$ tais que $\mathfrak{M} \models \Gamma$.
2. Podemos falhar nesse aspecto porque há $\mathfrak{M}$ tais que $\mathfrak{M} \models \Gamma$, mas $\mathfrak{M}$ não é uma das **estruturas** que pretendemos. Isso pode nos levar a adicionar axiomas que não são verdadeiros em $\mathfrak{M}$.
3. Se somos bem-sucedidos pelo menos no aspecto de que Γ é verdadeiro em todas as **estruturas** pretendidas, então uma sentença φ é verdadeira em todas as **estruturas** pretendidas sempre que $\Gamma \models \varphi$. Assim, podemos usar ferramentas lógicas (como métodos de **derivação**) para mostrar que sentenças são verdadeiras em todas as **estruturas** pretendidas simplesmente mostrando que elas são consequência dos axiomas.
4. Às vezes não temos **estruturas** pretendidas em mente, mas em vez disso partimos dos próprios axiomas: começamos com alguns primitivos que queremos que satisfaçam certas leis que codificamos em um sistema de axiomas. Uma coisa que gostaríamos de verificar imediatamente é que os axiomas não se contradizem: se o fizerem, não pode haver conceitos que obedeçam a essas leis, e teremos tentado estabelecer uma teoria incoerente. Podemos verificar que isso não acontece encontrando um modelo de Γ . E se há modelos da nossa teoria, podemos usar métodos lógicos para investigá-los, e também podemos usar métodos lógicos para construir modelos.
5. A independência dos axiomas é, igualmente, uma questão importante. Pode acontecer que um dos axiomas seja, na verdade, uma consequência dos outros, e seja, portanto, redundante. Podemos provar que um axioma φ em Γ é redundante provando $\Gamma \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Também podemos provar que um axioma não é redundante mostrando que $(\Gamma \setminus \{\varphi\}) \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfatível. Por exemplo, foi assim que se mostrou que o postulado das paralelas é independente dos outros axiomas da geometria.
6. Outra questão importante é a da definibilidade de conceitos em uma teoria: A escolha da linguagem determina em que consistem os modelos de uma teoria. Mas nem todo aspecto de uma teoria deve ser representado separadamente em seus modelos. Por exemplo, toda ordenação $\leq$ determina uma ordenação estrita correspondente $<$ —dada uma, nós podemos definir a outra. Então não é necessário que um modelo de uma teoria que envolve tal ordem deva conter *também* a ordenação estrita correspondente. Quando é o caso, em geral, de que uma relação pode ser definida em termos de outras? Quando é impossível definir uma relação em termos de outras (e, portanto, deve-se adicioná-la aos primitivos da linguagem)?

mat.2 Expressando Propriedades de Estruturas

fol:mat:exs:
sec

Frequentemente é útil e importante expressar condições sobre funções e relações, ou, mais geralmente, que as funções e relações em uma estrutura satisfaçam essas condições. Por exemplo, nós gostaríamos de ter maneiras de distinguir aquelas **estruturas** para uma linguagem que “capturam” o que queremos que os **símbolos de predicado** “signifiquem” daquelas que não capturam. É claro que somos completamente livres para especificar quais **estruturas** “pretendemos”, por exemplo, podemos especificar que a interpretação do **símbolo de predicado** $\leq$ deve ser uma ordenação, ou que estamos interessados apenas em interpretações de $\mathcal{L}$ nas quais o domínio consiste em conjuntos e $\in$ é interpretado pela relação “é um membro de”. Mas podemos fazer isso com **sentenças** da linguagem? Em outras palavras, quais condições sobre a **estrutura** $\mathfrak{M}$ podemos expressar por a **sentença** (ou talvez um conjunto de **sentenças**) na linguagem de $\mathfrak{M}$? Há algumas condições que não conseguiremos expressar. Por exemplo, não há sentença de $\mathcal{L}_A$ que seja verdadeira em uma **estrutura** $\mathfrak{M}$ somente se $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$. Não podemos expressar “o domínio contém apenas números naturais”. Mas há “propriedades estruturais” de **estruturas** que talvez possamos expressar. Quais propriedades de **estruturas** podemos expressar por **sentenças**? Ou, dito de outra forma, quais coleções de **estruturas** podemos descrever como aquelas que tornam a **sentença** (ou conjunto de **sentenças**) verdadeira?

explanation

Definição mat.2 (Modelo de um conjunto). Seja Γ um conjunto de **sentenças** em uma linguagem $\mathcal{L}$. Nós dizemos que a **estrutura** $\mathfrak{M}$ é um *modelo* de Γ se $\mathfrak{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$.

Exemplo mat.3. A sentença $\forall x x \leq x$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é uma relação reflexiva. A sentença $\forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é antissimétrica. A sentença $\forall x \forall y \forall z ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é transitiva. Assim, os modelos de

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x x \leq x, \\ \forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y), \\ \forall x \forall y \forall z ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z) \end{array} \right\}$$

são exatamente aquelas estruturas nas quais $\leq^{\mathfrak{M}}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é, uma ordem parcial. Portanto, podemos tomá-las como axiomas para a *teoria de primeira ordem das ordens parciais*.

mat.3 Exemplos de Teorias de Primeira Ordem

fol:mat:the:
sec

Exemplo mat.4. A teoria dos ordens lineares estritas na linguagem $\mathcal{L}_<$ é axiomatizada pelo conjunto

$$\{ \quad \forall x \neg x < x, \\ \forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y), \\ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \quad \}$$

Ela captura completamente as **estruturas** pretendidas: toda ordem linear estrita é um modelo deste sistema de axiomas e, vice-versa, se R é uma ordem linear sobre um conjunto X , então a estrutura $\mathfrak{M}$ com $|\mathfrak{M}| = X$ e $<^{\mathfrak{M}} = R$ é um modelo desta teoria.

Exemplo mat.5. A teoria dos grupos na linguagem $\mathbf{1}$ (**símbolo de constante**), $\cdot$ (**símbolo de função** de dois lugares) é axiomatizada por

$$\begin{aligned} \forall x (x \cdot \mathbf{1}) &= x \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z)) &= ((x \cdot y) \cdot z) \\ \forall x \exists y (x \cdot y) &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Exemplo mat.6. A teoria da aritmética de Peano é axiomatizada pelas seguintes sentenças na linguagem da aritmética $\mathcal{L}_A$.

$$\begin{aligned} \forall x \forall y (x' = y' \rightarrow x = y) \\ \forall x \mathbf{0} \neq x' \\ \forall x (x + \mathbf{0}) &= x \\ \forall x \forall y (x + y') &= (x + y)' \\ \forall x (x \times \mathbf{0}) &= \mathbf{0} \\ \forall x \forall y (x \times y') &= ((x \times y) + x) \\ \forall x \forall y (x < y \leftrightarrow \exists z (z' + x) = y) \end{aligned}$$

mais todas as sentenças da forma

$$(\varphi(\mathbf{0}) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x'))) \rightarrow \forall x \varphi(x)$$

Como há infinitas sentenças desta última forma, este sistema de axiomas é infinito. Esta última forma é chamada de *esquema de indução*. (Na verdade, o esquema de indução é um pouco mais complicado do que deixamos transparecer aqui.)

O último axioma é uma *definição explícita* de $<$.

Exemplo mat.7. A teoria dos conjuntos puros desempenha um papel importante nos fundamentos (e na filosofia) da matemática. Um conjunto é puro se todos os seus **membros** são também conjuntos puros. O conjunto vazio conta, portanto, como puro, mas um conjunto que tem como **um membro** algo que não é um conjunto não seria puro. Então os conjuntos puros são aqueles que

são formados apenas a partir do conjunto vazio e sem “urelementos”, isto é, objetos que não são, eles próprios, conjuntos.

O seguinte poderia ser considerado um sistema de axiomas para uma teoria dos conjuntos puros:

$$\begin{aligned} \exists x \neg \exists y y \in x \\ \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \\ \forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)) \\ \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (z \in u \wedge u \in x)) \end{aligned}$$

mais todas as sentenças da forma

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \varphi(y))$$

O primeiro axioma diz que há um conjunto sem **membros** (isto é, $\emptyset$ existe); o segundo diz que conjuntos são extensionais; o terceiro que, para quaisquer conjuntos X e Y , o conjunto $\{X, Y\}$ existe; o quarto que, para qualquer conjunto X , o conjunto $\cup X$ existe, onde $\cup X$ é a união de todos os elementos de X .

As **sentenças** mencionadas por último são chamadas coletivamente de *esquema de compreensão ingênuo*. Ele essencialmente diz que, para todo $\varphi(x)$, o conjunto $\{x : \varphi(x)\}$ existe—então, à primeira vista, um axioma verdadeiro, útil e talvez até necessário. É chamado de “ingênuo” porque, como se vê, ele torna esta teoria insatisfável: se você toma $\varphi(y)$ como $\neg y \in y$, obtém a **sentença**

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \neg y \in y)$$

e esta **sentença** não é satisfeita em nenhuma **estrutura**.

Exemplo mat.8. Na área da *mereologia*, a relação de *parte* é uma relação fundamental. Assim como as teorias de conjuntos, há teorias de parte que axiomatizam várias concepções (às vezes conflitantes) dessa relação.

A linguagem da mereologia contém um único símbolo de predicado de dois lugares P , e $P(x, y)$ “significa” que x é uma parte de y . Quando temos essa interpretação em mente, a **estrutura** para essa linguagem é chamada de *estrutura de parte*. É claro que nem toda estrutura para um único predicado de dois lugares realmente merecerá esse nome. Para ter uma chance de capturar “parte”, P^M deve satisfazer algumas condições, que podemos estabelecer como axiomas para uma teoria de parte. Por exemplo, a parte é uma ordem parcial sobre objetos: todo objeto é uma parte (ainda que uma parte *imprópria*) de si mesmo; dois objetos diferentes não podem ser partes um do outro; uma parte de uma parte de um objeto é, ela própria, parte daquele objeto. Note que, nesse sentido, “é uma parte de” se assemelha a “é um subconjunto de”, mas não se assemelha a “é um elemento de”, que não é nem reflexiva nem transitiva.

$$\begin{aligned} \forall x P(x, x) \\ \forall x \forall y ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow x = y) \\ \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)) \end{aligned}$$

Além disso, quaisquer dois objetos têm uma soma mereológica (um objeto que tem esses dois objetos como partes, e é minimal nesse aspecto).

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (P(z, u) \leftrightarrow (P(x, u) \wedge P(y, u)))$$

Estes são apenas alguns dos princípios básicos de parte considerados pelos metafísicos. Princípios adicionais, no entanto, rapidamente se tornam difíceis de formular ou escrever sem primeiro introduzir algumas relações definidas. Por exemplo, a maioria dos metafísicos interessados em mereologia também considera o seguinte como um princípio válido: sempre que um objeto x tem uma parte própria y , ele também tem uma parte z que não tem partes em comum com y , e tal que a fusão de y e z é x .

mat.4 Expressando Relações em a Estrutura

explanation Um uso principal que se pode dar às **fórmulas** é expressar propriedades e relações em **a estrutura** $\mathfrak{M}$ em termos dos primitivos da linguagem $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{M}$. Com isso queremos dizer o seguinte: o **domínio** de $\mathfrak{M}$ é um conjunto de objetos. Os **símbolos de constante**, **símbolos de função** e **símbolos de predicado** são interpretados em $\mathfrak{M}$ por alguns objetos em $|\mathfrak{M}|$, funções sobre $|\mathfrak{M}|$, e relações sobre $|\mathfrak{M}|$. Por exemplo, se A_0^2 está em $\mathcal{L}$, então $\mathfrak{M}$ atribui a ele uma relação $R = A_0^2{}^{\mathfrak{M}}$. Então a fórmula $A_0^2(v_1, v_2)$ *expressa* exatamente essa relação, no seguinte sentido: se uma atribuição de variáveis s mapeia v_1 para $a \in |\mathfrak{M}|$ e v_2 para $b \in |\mathfrak{M}|$, então

$$Rab \quad \text{sse} \quad \mathfrak{M}, s \models A_0^2(v_1, v_2).$$

Note que temos que envolver atribuições de variáveis aqui: não podemos simplesmente dizer “ $Rab \text{ sse } \mathfrak{M} \models A_0^2(a, b)$ ” porque a e b não são símbolos da nossa linguagem: eles são **membros** de $|\mathfrak{M}|$.

Como não temos apenas **fórmulas** atômicas, mas podemos combiná-las usando os conectivos lógicos e os quantificadores, **fórmulas** mais complexas podem definir outras relações que não estão diretamente embutidas em $\mathfrak{M}$. Estamos interessados em como fazer isso e, especificamente, quais relações podemos definir em **a estrutura**.

Definição mat.9. Seja $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ **a fórmula** de $\mathcal{L}$ na qual apenas $v_1, \dots, v_n$ ocorrem livres, e seja $\mathfrak{M}$ **a estrutura** para $\mathcal{L}$. $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ *expressa a relação* $R \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ sse

$$Ra_1 \dots a_n \quad \text{sse} \quad \mathfrak{M}, s \models \varphi(v_1, \dots, v_n)$$

para qualquer atribuição de variáveis s com $s(v_i) = a_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Exemplo mat.10. No modelo padrão da aritmética $\mathfrak{N}$, a **fórmula** $v_1 < v_2 \vee v_1 = v_2$ expressa a relação $\leq$ sobre $\mathbb{N}$. A **fórmula** $v_2 = v_1'$ expressa a relação sucessora, isto é, a relação $R \subseteq \mathbb{N}^2$ onde Rnm vale se m é o sucessor de n . A

fórmula $v_1 = v'_2$ expressa a relação predecessora. As fórmulas $\exists v_3 (v_3 \neq 0 \wedge v_2 = (v_1 + v_3))$ e $\exists v_3 (v_1 + v_3') = v_2$ ambas expressam a relação $<$. Isso significa que o símbolo de predicado $<$ é, na verdade, supérfluo na linguagem da aritmética; ele pode ser definido.

Essa ideia não é interessante apenas em estruturas específicas, mas geralmente sempre que usamos uma linguagem para descrever um modelo ou modelos pretendidos, isto é, quando consideramos teorias. Essas teorias frequentemente contêm apenas alguns símbolos de predicado como símbolos básicos, mas no domínio que elas são usadas para descrever muitas outras relações frequentemente desempenham um papel importante. Se essas outras relações podem ser sistematicamente expressas pelas relações que interpretam os símbolos de predicado básicos da linguagem, nós dizemos que podemos *defini-las* na linguagem. explanation

Problema mat.1. Encontre fórmulas em $\mathcal{L}_A$ que definam as seguintes relações:

1. n está entre i e j ;
2. n divide m exatamente (isto é, m é um múltiplo de n);
3. n é um número primo (isto é, nenhum número além de 1 e n divide n exatamente).

Problema mat.2. Suponha que a fórmula $\varphi(v_1, v_2)$ expressa a relação $R \subseteq |\mathfrak{M}|^2$ em a estrutura $\mathfrak{M}$. Encontre fórmulas que expressem as seguintes relações:

1. a inversa R^{-1} de R ;
2. o produto relativo $R \mid R$;

Você consegue encontrar uma maneira de expressar R^+ , o fecho transitivo de R ?

Problema mat.3. Seja $\mathcal{L}$ a linguagem contendo apenas um símbolo de predicado de 2 lugares $<$ (sem outros símbolos de constante, símbolos de função ou símbolos de predicado— exceto, é claro, $=$). Seja $\mathfrak{N}$ a estrutura tal que $|\mathfrak{N}| = \mathbb{N}$, e $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle n, m \rangle : n < m\}$. Prove o seguinte:

1. $\{0\}$ é definível em $\mathfrak{N}$;
2. $\{1\}$ é definível em $\mathfrak{N}$;
3. $\{2\}$ é definível em $\mathfrak{N}$;
4. para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{n\}$ é definível em $\mathfrak{N}$;
5. todo subconjunto finito de $|\mathfrak{N}|$ é definível em $\mathfrak{N}$;
6. todo subconjunto cofinito de $|\mathfrak{N}|$ é definível em $\mathfrak{N}$ (onde $X \subseteq \mathbb{N}$ é cofinito sse $\mathbb{N} \setminus X$ é finito).

mat.5 A Teoria dos Conjuntos

Quase toda a matemática pode ser desenvolvida na teoria dos conjuntos. Desenvolver a matemática nessa teoria envolve uma série de coisas. Primeiro, requer um conjunto de axiomas para a relação $\in$. Vários sistemas de axiomas diferentes foram desenvolvidos, às vezes com propriedades conflitantes de $\in$. O sistema de axiomas conhecido como **ZFC**, a teoria dos conjuntos de Zermelo–Fraenkel com o axioma da escolha, destaca-se: é de longe o mais amplamente usado e estudado, porque acontece que seus axiomas bastam para provar quase todas as coisas que os matemáticos esperam ser capazes de provar. Mas antes que isso possa ser estabelecido, é primeiro necessário deixar claro como podemos sequer *expressar* todas as coisas que os matemáticos gostariam de expressar. Para começar, a linguagem não contém **símbolos de constante** nem **símbolos de função**, então parece, à primeira vista, pouco claro que possamos falar sobre conjuntos particulares (como $\emptyset$ ou $\mathbb{N}$), falar sobre operações sobre conjuntos (como $X \cup Y$ e $\wp(X)$), muito menos outras construções que envolvem coisas diferentes de conjuntos, como relações e funções.

Para começar, “é um elemento de” não é a única relação na qual estamos interessados: “é um subconjunto de” parece quase tão importante. Mas nós podemos *definir* “é um subconjunto de” em termos de “é um elemento de”. Para fazer isso, temos que encontrar **a fórmula** $\varphi(x, y)$ na linguagem da teoria dos conjuntos que é satisfeita por um par de conjuntos $\langle X, Y \rangle$ sse $X \subseteq Y$. Mas X é um subconjunto de Y exatamente quando todos os **membros** de X são também **membros** de Y . Então podemos definir $\subseteq$ pela fórmula

$$\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$$

Agora, sempre que quisermos usar a relação $\subseteq$ em uma fórmula, nós poderíamos, em vez disso, usar aquela fórmula (com x e y adequadamente substituídos, e a variável ligada z renomeada se necessário). Por exemplo, a extensionalidade dos conjuntos significa que se quaisquer conjuntos x e y estão contidos um no outro, então x e y devem ser o mesmo conjunto. Isso pode ser expresso por $\forall x \forall y ((x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow x = y)$, ou, se substituirmos $\subseteq$ pela definição acima, por

$$\forall x \forall y ((\forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \wedge \forall z (z \in y \rightarrow z \in x)) \rightarrow x = y).$$

Este é, de fato, um dos axiomas de **ZFC**, o “axioma da extensionalidade”.

Não há **símbolo de constante** para $\emptyset$, mas podemos expressar “ x é vazio” por $\neg \exists y y \in x$. Então “ $\emptyset$ existe” torna-se a **sentença** $\exists x \neg \exists y y \in x$. Este é outro axioma de **ZFC**. (Note que o axioma da extensionalidade implica que há apenas um conjunto vazio.) Sempre que quisermos falar sobre $\emptyset$ na linguagem da teoria dos conjuntos, nós escreveríamos isso como “há um conjunto que é vazio e ...” Como exemplo, para expressar o fato de que $\emptyset$ é um subconjunto de todo conjunto, poderíamos escrever

$$\exists x (\neg \exists y y \in x \wedge \forall z x \subseteq z)$$

onde, é claro, $x \subseteq z$ teria, por sua vez, que ser substituído por sua definição.

Para falar sobre operações sobre conjuntos, como $X \cup Y$ e $\wp(X)$, nós temos que usar um truque semelhante. Não há símbolos de função na linguagem da teoria dos conjuntos, mas podemos expressar as relações funcionais $X \cup Y = Z$ e $\wp(X) = Y$ por

$$\begin{aligned} \forall u ((u \in x \vee u \in y) \leftrightarrow u \in z) \\ \forall u (u \subseteq x \leftrightarrow u \in y) \end{aligned}$$

já que os **membros** de $X \cup Y$ são exatamente os conjuntos que são ou **membros** de X ou **membros** de Y , e os **membros** de $\wp(X)$ são exatamente os subconjuntos de X . No entanto, isso não nos permite usar $x \cup y$ ou $\wp(x)$ como se fossem termos: só podemos usar as **fórmulas** inteiras que definem as relações $X \cup Y = Z$ e $\wp(X) = Y$. De fato, não sabemos que essas relações são alguma vez satisfeitas, isto é, não sabemos que uniões e conjuntos potência sempre existem. Por exemplo, a **sentença** $\forall x \exists y \wp(x) = y$ é outro axioma de **ZFC** (o axioma do conjunto potência).

E quanto a falar de pares ordenados ou funções? Aqui temos que explicar como podemos pensar em pares ordenados e funções como tipos especiais de conjuntos. Uma maneira de definir o par ordenado $\langle x, y \rangle$ é como o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Mas, como antes, não podemos introduzir **a símbolo de função** que nomeie esse conjunto; só podemos definir a relação $\langle x, y \rangle = z$, isto é, $\{\{x\}, \{x, y\}\} = z$:

$$\forall u (u \in z \leftrightarrow (\forall v (v \in u \leftrightarrow v = x) \vee \forall v (v \in u \leftrightarrow (v = x \vee v = y))))$$

Isso diz que os **membros** u de z são exatamente aqueles conjuntos que ou têm x como seu único **membro** ou têm x e y como seus únicos **membros** (em outras palavras, aqueles conjuntos que são ou idênticos a $\{x\}$ ou idênticos a $\{x, y\}$). Uma vez que temos isso, podemos dizer outras coisas, por exemplo, que $X \times Y = Z$:

$$\forall z (z \in Z \leftrightarrow \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y \rangle = z))$$

Uma função $f: X \rightarrow Y$ pode ser pensada como a relação $f(x) = y$, isto é, como o conjunto de pares $\{\langle x, y \rangle : f(x) = y\}$. Nós podemos então dizer que um conjunto f é uma função de X em Y se (a) é uma relação $\subseteq X \times Y$, (b) é total, isto é, para todo $x \in X$ há algum $y \in Y$ tal que $\langle x, y \rangle \in f$ e (c) é funcional, isto é, sempre que $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f$, $y = y'$ (porque os valores de funções devem ser únicos). Então “ f é uma função de X em Y ” pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \forall u (u \in f \rightarrow \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y \rangle = u)) \wedge \\ \forall x (x \in X \rightarrow (\exists y (y \in Y \wedge \text{mapeia}(f, x, y)) \wedge \\ (\forall y \forall y' ((\text{mapeia}(f, x, y) \wedge \text{mapeia}(f, x, y')) \rightarrow y = y')))) \end{aligned}$$

onde $\text{mapeia}(f, x, y)$ abrevia $\exists v (v \in f \wedge \langle x, y \rangle = v)$ (esta **fórmula** expressa “ $f(x) = y$ ”).

Agora também não é difícil expressar que $f: X \rightarrow Y$ é **injetiva**, por exemplo:

$$f: X \rightarrow Y \wedge \forall x \forall x' ((x \in X \wedge x' \in X \wedge \exists y (\text{mapeia}(f, x, y) \wedge \text{mapeia}(f, x', y))) \rightarrow x = x')$$

Uma função $f: X \rightarrow Y$ é **injetiva** sse, sempre que f mapeia $x, x' \in X$ para um único y , $x = x'$. Se abreviarmos esta fórmula como $\text{inj}(f, X, Y)$, já estamos em posição de afirmar na linguagem da teoria dos conjuntos algo tão não trivial quanto o teorema de Cantor: não há função **injetiva** de $\wp(X)$ em X :

$$\forall X \forall Y (\wp(X) = Y \rightarrow \neg \exists f \text{inj}(f, Y, X))$$

Poderíamos pensar que a teoria dos conjuntos requer outro axioma que garanta a existência de um conjunto para toda propriedade definidora. Se $\varphi(x)$ é uma fórmula da teoria dos conjuntos com a variável x livre, podemos considerar a **sentença**

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Esta **sentença** afirma que há um conjunto y cujos **membros** são todos e somente aqueles x que satisfazem $\varphi(x)$. Este esquema é chamado de “princípio da compreensão”. Parece muito útil; infelizmente é inconsistente. Tome $\varphi(x) \equiv \neg x \in x$, então o princípio da compreensão afirma

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x),$$

isto é, afirma a existência de um conjunto de todos os conjuntos que não são **membros** de si mesmos. Nenhum tal conjunto pode existir—este é o Paradoxo de Russell. **ZFC**, de fato, contém uma versão restrita—e consistente—deste princípio, o princípio da separação:

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x))).$$

Problema mat.4. Mostre que o princípio da compreensão é inconsistente dando a **derivação** que mostre

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x) \vdash \perp.$$

Pode ajudar mostrar primeiro $(A \rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \rightarrow A) \vdash \perp$.

mat.6 Expressando o Tamanho de **Estruturas**

explanation Há algumas propriedades de estruturas que podemos expressar mesmo sem usar os símbolos não lógicos de uma linguagem. Por exemplo, há **sentenças** que são verdadeiras em a **estrutura** se, e somente se, o **domínio** da **estrutura** tem pelo menos, no máximo ou exatamente um certo número n de **membros**. fol:mat:siz:sec

Proposição mat.11. A *sentença*

$$\begin{aligned} \varphi_{\geq n} \equiv \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge \dots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge \dots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \\ x_{n-1} \neq x_n) \end{aligned}$$

é verdadeira em a *estrutura* $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém pelo menos n *membros*. Consequentemente, $\mathfrak{M} \models \neg \varphi_{\geq n+1}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém no máximo n *membros*.

Proposição mat.12. A *sentença*

$$\begin{aligned} \varphi_{=n} \equiv \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge \dots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge \dots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \\ x_{n-1} \neq x_n \wedge \\ \forall y (y = x_1 \vee \dots \vee y = x_n)) \end{aligned}$$

é verdadeira em a *estrutura* $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém exatamente n *membros*.

Proposição mat.13. Uma *estrutura* é infinita se, e somente se, é um modelo de

$$\{\varphi_{\geq 1}, \varphi_{\geq 2}, \varphi_{\geq 3}, \dots\}.$$

Não há uma única sentença puramente lógica que seja verdadeira em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ é infinito. No entanto, pode-se dar *sentenças* com *símbolos de predicado* não lógicos que só têm modelos infinitos (embora nem toda *estrutura* infinita seja modelo delas). A propriedade de ser uma estrutura finita e a propriedade de ser uma estrutura *não enumerável* nem sequer podem ser expressas com um conjunto infinito de *sentenças*. Estes fatos seguem dos teoremas da compacidade e de Löwenheim–Skolem.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas