

## mat.1 Introdução

fol:mat:int:  
sec

O desenvolvimento do método axiomático é uma conquista significativa na história da ciência, e é de especial importância na história da matemática. Um desenvolvimento axiomático de um campo envolve o esclarecimento de muitas questões: Do que trata o campo? Quais são os conceitos mais fundamentais? Como eles se relacionam? Todos os conceitos do campo podem ser definidos em termos desses conceitos fundamentais? Que leis esses conceitos obedecem, e devem obedecer?

O método axiomático e a lógica foram feitos um para o outro. A lógica formal fornece as ferramentas para formular teorias axiomáticas, para provar teoremas a partir dos axiomas da teoria de uma maneira precisamente especificada, para estudar as propriedades de todos os sistemas que satisfazem os axiomas de uma maneira sistemática.

**Definição mat.1.** Um conjunto de **sentenças**  $\Gamma$  é *fechado* sse, sempre que  $\Gamma \models \varphi$  então  $\varphi \in \Gamma$ . O *fecho* de um conjunto de **sentenças**  $\Gamma$  é  $\{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$ .

Dizemos que  $\Gamma$  é *axiomatizado* por um conjunto de sentenças  $\Delta$  se  $\Gamma$  é o fecho de  $\Delta$ .

Podemos pensar em uma teoria axiomática como o conjunto de sentenças que é axiomatizado por seu conjunto de axiomas  $\Delta$ . Em outras palavras, quando temos uma linguagem de primeira ordem que contém símbolos não lógicos para os primitivos da ciência desenvolvida axiomáticamente que desejamos estudar, juntamente com um conjunto de **sentenças** que expressam as leis fundamentais da ciência, podemos pensar na teoria como representada por todas as **sentenças** nessa linguagem que são consequência dos axiomas. Isso varia de exemplos simples com apenas um único primitivo e axiomas simples, como a teoria das ordens parciais, até teorias complexas como a mecânica newtoniana.

Os fatos lógicos importantes que tornam essa abordagem formal do método axiomático tão importante são os seguintes. Suponha que  $\Gamma$  é um sistema de axiomas para uma teoria, isto é, um conjunto de sentenças.

1. Podemos afirmar precisamente quando um sistema de axiomas captura uma classe pretendida de **estruturas**. Isto é, se estamos interessados em uma certa classe de **estruturas**, capturaremos com sucesso essa classe por um sistema de axiomas  $\Gamma$  sse as **estruturas** são exatamente aquelas  $\mathfrak{M}$  tais que  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ .
2. Podemos falhar nesse aspecto porque há  $\mathfrak{M}$  tais que  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ , mas  $\mathfrak{M}$  não é uma das **estruturas** que pretendemos. Isso pode nos levar a adicionar axiomas que não são verdadeiros em  $\mathfrak{M}$ .
3. Se somos bem-sucedidos pelo menos no aspecto de que  $\Gamma$  é verdadeiro em todas as **estruturas** pretendidas, então uma sentença  $\varphi$  é verdadeira em todas as **estruturas** pretendidas sempre que  $\Gamma \models \varphi$ . Assim, podemos usar

ferramentas lógicas (como métodos de **derivação**) para mostrar que sentenças são verdadeiras em todas as **estruturas** pretendidas simplesmente mostrando que elas são consequência dos axiomas.

4. Às vezes não temos **estruturas** pretendidas em mente, mas em vez disso partimos dos próprios axiomas: começamos com alguns primitivos que queremos que satisfaçam certas leis que codificamos em um sistema de axiomas. Uma coisa que gostaríamos de verificar imediatamente é que os axiomas não se contradizem: se o fizerem, não pode haver conceitos que obedeçam a essas leis, e teremos tentado estabelecer uma teoria incoerente. Podemos verificar que isso não acontece encontrando um modelo de  $\Gamma$ . E se há modelos da nossa teoria, podemos usar métodos lógicos para investigá-los, e também podemos usar métodos lógicos para construir modelos.
5. A independência dos axiomas é, igualmente, uma questão importante. Pode acontecer que um dos axiomas seja, na verdade, uma consequência dos outros, e seja, portanto, redundante. Podemos provar que um axioma  $\varphi$  em  $\Gamma$  é redundante provando  $\Gamma \setminus \{\varphi\} \models \varphi$ . Também podemos provar que um axioma não é redundante mostrando que  $(\Gamma \setminus \{\varphi\}) \cup \{\neg\varphi\}$  é satisfatível. Por exemplo, foi assim que se mostrou que o postulado das paralelas é independente dos outros axiomas da geometria.
6. Outra questão importante é a da definibilidade de conceitos em uma teoria: A escolha da linguagem determina em que consistem os modelos de uma teoria. Mas nem todo aspecto de uma teoria deve ser representado separadamente em seus modelos. Por exemplo, toda ordenação  $\leq$  determina uma ordenação estrita correspondente  $<$ —dada uma, nós podemos definir a outra. Então não é necessário que um modelo de uma teoria que envolve tal ordem deva conter *também* a ordenação estrita correspondente. Quando é o caso, em geral, de que uma relação pode ser definida em termos de outras? Quando é impossível definir uma relação em termos de outras (e, portanto, deve-se adicioná-la aos primitivos da linguagem)?

## Créditos das Imagens

## Referências Bibliográficas