

mat.1 Expressando Propriedades de Estruturas

fol:mat:exs: Frequentemente é útil e importante expressar condições sobre funções e relações, explanation
sec

ou, mais geralmente, que as funções e relações em uma estrutura satisfaçam essas condições. Por exemplo, nós gostaríamos de ter maneiras de distinguir aquelas estruturas para uma linguagem que “capturam” o que queremos que os símbolos de predicado “signifiquem” daquelas que não capturam. É claro que somos completamente livres para especificar quais estruturas “pretendemos”, por exemplo, podemos especificar que a interpretação do símbolo de predicado $\leq$ deve ser uma ordenação, ou que estamos interessados apenas em interpretações de $\mathcal{L}$ nas quais o domínio consiste em conjuntos e $\in$ é interpretado pela relação “é um membro de”. Mas podemos fazer isso com sentenças da linguagem? Em outras palavras, quais condições sobre a estrutura $\mathfrak{M}$ podemos expressar por a sentença (ou talvez um conjunto de sentenças) na linguagem de $\mathfrak{M}$? Há algumas condições que não conseguiremos expressar. Por exemplo, não há sentença de $\mathcal{L}_A$ que seja verdadeira em uma estrutura $\mathfrak{M}$ somente se $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$. Não podemos expressar “o domínio contém apenas números naturais”. Mas há “propriedades estruturais” de estruturas que talvez possamos expressar. Quais propriedades de estruturas podemos expressar por sentenças? Ou, dito de outra forma, quais coleções de estruturas podemos descrever como aquelas que tornam a sentença (ou conjunto de sentenças) verdadeira?

Definição mat.1 (Modelo de um conjunto). Seja Γ um conjunto de sentenças em uma linguagem $\mathcal{L}$. Nós dizemos que a estrutura $\mathfrak{M}$ é um modelo de Γ se $\mathfrak{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$.

Exemplo mat.2. A sentença $\forall x x \leq x$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é uma relação reflexiva. A sentença $\forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é antissimétrica. A sentença $\forall x \forall y \forall z ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é transitiva. Assim, os modelos de

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x x \leq x, \\ \forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y), \\ \forall x \forall y \forall z ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z) \end{array} \right\}$$

são exatamente aquelas estruturas nas quais $\leq^{\mathfrak{M}}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é, uma ordem parcial. Portanto, podemos tomá-las como axiomas para a teoria de primeira ordem das ordens parciais.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas