

int.1 Satisfação

fol:int:sat:
sec

Já podemos avançar para a semântica da lógica de primeira ordem assim que sabemos o que são **fórmulas**: aqui, a definição básica é a de **a estrutura**. Para nossa linguagem simples, uma **estrutura** $\mathfrak{M}$ tem apenas três componentes: um conjunto não vazio $|\mathfrak{M}|$ chamado de **domínio**, o que a designa em $\mathfrak{M}$, e do que P é verdadeiro em $\mathfrak{M}$. O objeto designado por a é denotado por $a^{\mathfrak{M}}$ e o conjunto de coisas das quais P é verdadeiro por $P^{\mathfrak{M}}$. A **estrutura** $\mathfrak{M}$ consiste apenas nestas três coisas: $|\mathfrak{M}|$, $a^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$ e $P^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|$. O caso geral será mais complicado, pois haverá muitos **símbolos de predicado** e **símbolos de constante**, os **símbolos de constante** podem ter mais de um lugar, e haverá também **símbolos de função**.

Isso basta para dar uma definição de satisfação para **fórmulas** que não contêm **variáveis**. A ideia é dar uma definição indutiva que espelha a maneira como definimos **fórmulas**. Especificamos quando uma fórmula atômica é satisfeita em $\mathfrak{M}$, e então quando, por exemplo, $\neg\varphi$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ com base em se φ é ou não satisfeita em $\mathfrak{M}$. Por exemplo, poderíamos definir:

1. $P(a)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $a^{\mathfrak{M}} \in P^{\mathfrak{M}}$.
2. $\neg\varphi$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, φ não é satisfeita em $\mathfrak{M}$.
3. $(\varphi \wedge \psi)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, φ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ e ψ também é satisfeita em $\mathfrak{M}$.

Digamos que $|\mathfrak{M}| = \{0, 1, 2\}$, $a^{\mathfrak{M}} = 1$ e $P^{\mathfrak{M}} = \{1, 2\}$. Esta definição nos diria que $P(a)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ (pois $a^{\mathfrak{M}} = 1 \in \{1, 2\} = P^{\mathfrak{M}}$). Nos diria ainda que $\neg P(a)$ não é satisfeita em $\mathfrak{M}$, e que, por sua vez, $\neg\neg P(a)$ é, e que $(\neg P(a) \wedge P(a))$ não é satisfeita, e assim por diante.

A dificuldade surge quando queremos dar uma definição para os quantificadores: gostaríamos de dizer algo como: “ $\exists v_0 P(v_0)$ é satisfeita se, e somente se, $P(v_0)$ é satisfeita.” Mas a **estrutura** $\mathfrak{M}$ não nos diz o que fazer com **variáveis**. O que realmente queremos dizer é que $P(v_0)$ é satisfeita *para algum valor de* v_0 . Para tornar isso preciso, precisamos de uma maneira de atribuir **membros** de $|\mathfrak{M}|$ não apenas a a , mas também a v_0 . Para isso, introduzimos *atribuições de variáveis*. Uma atribuição de variáveis é simplesmente uma função s que mapeia **variáveis** para **membros** de $|\mathfrak{M}|$ (em nosso exemplo, para um entre 1, 2 ou 3). Como não sabemos de antemão quais **variáveis** podem aparecer em uma **fórmula**, não podemos limitar a quais **variáveis** s atribui valores. A solução simples é exigir que s atribua valores a *todas* as **variáveis** $v_0, v_1, \dots$. Usaremos apenas aquelas de que precisarmos.

Em vez de definir a satisfação de **fórmulas** apenas em relação a uma **estrutura**, definiremos em relação a uma **estrutura** $\mathfrak{M}$ e uma atribuição de variáveis s , e escreveremos $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ por brevidade. Nossa definição agora incluirá uma cláusula adicional para lidar com **fórmulas** atômicas contendo **variáveis**:

1. $\mathfrak{M}, s \models P(a)$ se, e somente se, $a^{\mathfrak{M}} \in P^{\mathfrak{M}}$.

2. $\mathfrak{M}, s \models P(v_i)$ se, e somente se, $s(v_i) \in P^{\mathfrak{M}}$.
3. $\mathfrak{M}, s \models \neg\varphi$ se, e somente se, não $\mathfrak{M}, s \models \varphi$.
4. $\mathfrak{M}, s \models (\varphi \wedge \psi)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ e $\mathfrak{M}, s \models \psi$.

Ok, isso resolve um problema: agora podemos dizer quando $\mathfrak{M}$ satisfaz $P(v_0)$ para o valor $s(v_0)$. Para obter a definição correta para $\exists v_0 P(v_0)$ temos que fazer mais uma coisa: queremos que $\mathfrak{M}, s \models \exists v_0 P(v_0)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s' \models P(v_0)$ para *alguma* maneira s' de atribuir um valor a v_0 . Mas o valor atribuído a v_0 não precisa necessariamente ser o valor que $s(v_0)$ escolhe. Introduziremos uma notação para isso: se $m \in |\mathfrak{M}|$, então deixamos $s[m/v_0]$ ser a atribuição que é igual a s (para todas as **variáveis** diferentes de v_0), exceto que a v_0 atribui m . Agora nossa definição pode ser:

5. $\mathfrak{M}, s \models \exists v_i \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s[m/v_i] \models \varphi$ para algum $m \in |\mathfrak{M}|$.

Funciona? Digamos que $s(v_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. $\mathfrak{M}, s \models \exists v_0 P(v_0)$ se, e somente se, há um $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s[m/v_0] \models P(v_0)$. E há: podemos escolher $m = 1$ ou $m = 2$. Note que isso é verdadeiro mesmo que o valor $s(v_0)$ atribuído a v_0 por s —neste caso, 0—não faça o trabalho. Temos $\mathfrak{M}, s[1/v_0] \models P(v_0)$, mas não $\mathfrak{M}, s \models P(v_0)$.

Se isso parece confuso e trabalhoso: é. Mas a complexidade adicional é necessária para dar uma definição precisa e indutiva de satisfação para todas as **fórmulas**, e precisamos de algo assim para definir precisamente as noções semânticas. Há outras maneiras de fazer isso, mas todas são igualmente (in)elegantes.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas