

int.1 Lógica de Primeira Ordem

fol:int:fol:
sec

Você provavelmente já conhece a lógica de primeira ordem da sua primeira introdução à lógica formal.¹ Pode conhecê-la como “lógica quantificacional” ou “lógica de predicados”. A lógica de primeira ordem, antes de tudo, é uma linguagem formal. Isso significa que ela tem um certo vocabulário, e suas expressões são cadeias desse vocabulário. Mas nem toda cadeia é permitida. Há diferentes tipos de expressões permitidas: termos, fórmulas e sentenças. Estamos principalmente interessados em sentenças da lógica de primeira ordem: elas nos fornecem um análogo formal de sentenças do inglês, e sobre elas podemos fazer as perguntas que um lógico tipicamente se interessa. Por exemplo:

- ψ segue logicamente de φ ?
- φ é logicamente verdadeira, logicamente falsa ou contingente?
- φ e ψ são equivalentes?

Essas perguntas são primariamente perguntas sobre o “significado” das sentenças da lógica de primeira ordem. Por exemplo, um filósofo analisaria a pergunta de se ψ segue logicamente de φ como perguntando: há um caso em que φ é verdadeira mas ψ é falsa (ψ não segue de φ), ou todo caso que torna φ verdadeira também torna ψ verdadeira (ψ segue de φ)? Mas ainda não nos foi dito o que é um “caso”—esse é o trabalho da *semântica*. A semântica da lógica de primeira ordem fornece um modelo matematicamente preciso da ideia intuitiva do filósofo de “caso”, e também—e isso é importante—do que significa uma sentença φ ser verdadeira em um caso. Chamamos o modelo matematicamente preciso que desenvolveremos de *estrutura*. A relação que torna “verdadeira em” precisa é chamada de relação de *satisfação*. Assim, o que definiremos é “ φ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ ” (em símbolos: $\mathfrak{M} \models \varphi$) para sentenças φ e estruturas $\mathfrak{M}$. Uma vez feito isso, também podemos dar definições precisas dos outros termos semânticos como “segue de” ou “é logicamente verdadeira”. Essas definições tornarão possível decidir, novamente com precisão matemática, se, por exemplo, $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)), \exists x \varphi(x) \models \exists x \psi(x)$. A resposta será, é claro, “sim”. Se você já foi treinado para simbolizar sentenças do inglês na lógica de primeira ordem, reconhecerá isto como, por exemplo, a simbolização de “Todas as formigas são insetos, há formigas, portanto há insetos.” Isso é obviamente um argumento válido, e assim nosso modelo matemático de “segue de” para nossa linguagem formal deve dar a mesma resposta.

Outro tópico que você provavelmente lembra da sua primeira introdução à lógica formal é que há *derivações*. Se você fez um primeiro curso de lógica formal, seu professor o fez praticar a encontrar tais *derivações*, talvez até uma *derivação* que mostra que a consequência acima vale. Há muitas maneiras diferentes de dar *derivações*: você pode ter feito algo chamado “dedução natural” ou “árvores de verdade”, mas há muitas outras. O propósito dos sistemas de

¹De fato, mais ou menos assumimos que sim! Se não conhece, pode revisar um livro-texto mais elementar, como *forall x* (Magnus et al., 2021).

derivação é fornecer ferramentas com as quais as perguntas dos lógicos acima podem ser respondidas: por exemplo, uma **derivação** de dedução natural em que $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ e $\exists x \varphi(x)$ são premissas e $\exists x \psi(x)$ é a conclusão (última linha) *verifica* que $\exists x \psi(x)$ segue logicamente de $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ e $\exists x \varphi(x)$.

Mas por quê? À primeira vista, os sistemas de **derivação** não têm nada a ver com semântica: dar uma **derivação** formal envolve apenas dispor símbolos de certas maneiras regidas por regras; eles não mencionam “casos” ou “verdadeira em” de forma alguma. A conexão entre sistemas de **derivação** e semântica tem de ser estabelecida por uma investigação metalógica. O que é necessário é uma prova matemática, por exemplo, de que uma **derivação** formal de $\exists x \psi(x)$ a partir das premissas $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ e $\exists x \varphi(x)$ é possível se, e somente se, $\exists x \psi(x)$ é consequência de $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ e $\exists x \varphi(x)$ em conjunto. Antes que isso possa ser feito, entretanto, muito trabalho minucioso tem de ser realizado para acertar as definições de sintaxe e semântica.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Magnus, P. D., Tim Button, J. Robert Loftis, Aaron Thomas-Bolduc, Robert Trueman, and Richard Zach. 2021. *forall x: Calgary. An Introduction to Formal Logic*. Calgary: Open Logic Project, f21 ed. URL <https://forallx.openlogicproject.org/>.