Parte I

Lógica de Primeira Ordem

Esta parte cobre a metateoria da lógica de primeira ordem através completude. Atualmente não depende de um tratamento separado de lógica proposicional; tudo está provado. Os arquivos de origem serão exclua o material sobre quantificadores (e substitua "estrutura" com "valoração", $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{v}$, etc.) se a tag "FOL" é falsa. Na verdade, a maior parte do material da peça na lógica proposicional é simplesmente o material de primeira ordem com o Etiqueta "FOL" desativada.

Se a parte sobre lógica proposicional for incluída, isso resulta em uma muita repetição. Está planeado, no entanto, tornar possível deixe esta parte levar em conta o material sobre lógica proposicional (e excluir o material já abordado, bem como encurtar as provas com referências aos respectivos lugares no proposicional parte).

Capítulo 1

Introdução à Lógica de Primeira Ordem

1.1 Lógica de Primeira Ordem

fol:int:fol:sec

Você provavelmente já conhece a lógica de primeira ordem da sua primeira introdução à lógica formal.[1] Pode conhecê-la como "lógica quantificacional" ou "lógica de predicados". A lógica de primeira ordem, antes de tudo, é uma linguagem formal. Isso significa que ela tem um certo vocabulário, e suas expressões são cadeias desse vocabulário. Mas nem toda cadeia é permitida. Há diferentes tipos de expressões permitidas: termos, fórmulas e sentenças. Estamos principalmente interessados em sentenças da lógica de primeira ordem: elas nos fornecem um análogo formal de sentenças do inglês, e sobre elas podemos fazer as perguntas que um lógico tipicamente se interessa. Por exemplo:

- ψ segue logicamente de φ?
- φ é logicamente verdadeira, logicamente falsa ou contingente?
- φ e ψ são equivalentes?

Essas perguntas são primariamente perguntas sobre o "significado" das sentenças da lógica de primeira ordem. Por exemplo, um filósofo analisaria a pergunta de se ψ segue logicamente de φ como perguntando: há um caso em que φ é verdadeira mas ψ é falsa (ψ não segue de φ), ou todo caso que torna φ verdadeira também torna ψ verdadeira (ψ segue de φ)? Mas ainda não nos foi dito o que é um "caso"—esse é o trabalho da *semântica*. A semântica da lógica de primeira ordem fornece um modelo matematicamente preciso da ideia intuitiva do filósofo de "caso", e também—e isso é importante—do que significa uma sentença φ ser *verdadeira em* um caso. Chamamos o modelo matematicamente preciso que desenvolveremos de a estrutura. A relação que torna "verdadeira

[1] De fato, mais ou menos assumimos que sim! Se não conhece, pode revisar um livro-texto mais elementar, como *forall x* (Magnus et al., 2021).

em" precisa é chamada de relação de *satisfação*. Assim, o que definiremos é "φ é satisfeita em $\mathfrak{M}$" (em símbolos: $\mathfrak{M} \vDash \varphi$) para sentenças φ e estruturas $\mathfrak{M}$. Uma vez feito isso, também podemos dar definições precisas dos outros termos semânticos como "segue de" ou "é logicamente verdadeira". Essas definições tornarão possível decidir, novamente com precisão matemática, se, por exemplo, $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x\,\varphi(x) \vDash \exists x\,\psi(x)$. A resposta será, é claro, "sim". Se você já foi treinado para simbolizar sentenças do inglês na lógica de primeira ordem, reconhecerá isto como, por exemplo, a simbolização de "Todas as formigas são insetos, há formigas, portanto há insetos." Isso é obviamente um argumento válido, e assim nosso modelo matemático de "segue de" para nossa linguagem formal deve dar a mesma resposta.

Outro tópico que você provavelmente lembra da sua primeira introdução à lógica formal é que há *derivações*. Se você fez um primeiro curso de lógica formal, seu professor o fez praticar a encontrar tais derivações, talvez até uma derivação que mostra que a consequência acima vale. Há muitas maneiras diferentes de dar derivações: você pode ter feito algo chamado "dedução natural" ou "árvores de verdade", mas há muitas outras. O propósito dos sistemas de derivação é fornecer ferramentas com as quais as perguntas dos lógicos acima podem ser respondidas: por exemplo, uma derivação de dedução natural em que $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$ e $\exists x\,\varphi(x)$ são premissas e $\exists x\,\psi(x)$ é a conclusão (última linha) *verifica* que $\exists x\,\psi(x)$ segue logicamente de $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$ e $\exists x\,\varphi(x)$.

Mas por quê? À primeira vista, os sistemas de derivação não têm nada a ver com semântica: dar uma derivação formal envolve apenas dispor símbolos de certas maneiras regidas por regras; eles não mencionam "casos" ou "verdadeira em" de forma alguma. A conexão entre sistemas de derivação e semântica tem de ser estabelecida por uma investigação metalógica. O que é necessário é uma prova matemática, por exemplo, de que uma derivação formal de $\exists x\,\psi(x)$ a partir das premissas $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$ e $\exists x\,\varphi(x)$ é possível se, e somente se, $\exists x\,\psi(x)$ é consequência de $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi(x))$ e $\exists x\,\varphi(x)$ em conjunto. Antes que isso possa ser feito, entretanto, muito trabalho minucioso tem de ser realizado para acertar as definições de sintaxe e semântica.

1.2 Sintaxe

fol:int:syn:sec

Primeiro devemos tornar preciso quais cadeias de símbolos contam como sentenças da lógica de primeira ordem. Faremos isso mais adiante; por enquanto, procederemos por exemplos. Os blocos de construção básicos—o vocabulário—da lógica de primeira ordem dividem-se em duas partes. A primeira parte são os símbolos que usamos para dizer coisas específicas ou para destacar coisas específicas. Destacamos coisas usando símbolos de constante, e dizemos coisas sobre o que destacamos usando símbolos de predicado. Por exemplo, poderíamos usar a como a símbolo de constante para destacar uma única coisa, e então dizer algo sobre ela usando a sentença $P(a)$. Se você tem significados para "a" e "P" em mente, pode ler $P(a)$ como uma sentença do inglês (e provavelmente já fez isso quando aprendeu lógica formal pela primeira vez). Uma

vez que se tem tais sentenças simples da lógica de primeira ordem, pode-se construir outras mais complexas usando a segunda parte do vocabulário: os símbolos lógicos (conectivos e quantificadores). Assim, por exemplo, podemos formar expressões como $(P(a) \land Q(b))$ ou $\exists x\, P(x)$.

Para fornecer as definições precisas de semântica e as regras dos nossos sistemas de derivação necessárias para o estudo meta-lógico rigoroso, temos primeiro que dar uma definição precisa do que conta como a sentença da lógica de primeira ordem. A ideia básica é fácil o suficiente de entender: há algumas sentenças simples que podemos formar apenas a partir de símbolos de predicado e símbolos de constante, como $P(a)$. E então a partir destas formamos outras mais complexas usando os conectivos e quantificadores. Mas quais são exatamente as regras pelas quais nos é permitido formar sentenças mais complexas? Elas devem ser especificadas; caso contrário, não definimos "sentença da lógica de primeira ordem" com precisão suficiente. Há algumas questões. A primeira é obter as cadeias certas para contarem como sentenças. A segunda é fazê-lo de tal forma que possamos dar provas matemáticas sobre *todas* as sentenças. Finalmente, teremos também que dar definições precisas de algumas operações rudimentares com sentenças, como "substituir todo x em φ por b." O problema é que os quantificadores e variáveis que temos na lógica de primeira ordem tornam não inteiramente óbvio como isso deve ser feito. Por exemplo, $\exists x\, P(a)$ deve contar como a sentença? E quanto a $\exists x \exists x\, P(x)$? Qual deveria ser o resultado de "substituir x por b em $(P(x) \land \exists x\, P(x))$"?

1.3 Fórmulas

Eis a abordagem que usaremos para especificar rigorosamente as sentenças da lógica de primeira ordem e para lidar com as questões decorrentes do uso de variáveis. Primeiro definimos um conjunto *diferente* de expressões: fórmulas. Uma vez feito isso, podemos considerar o papel que as variáveis desempenham nelas—e, com base em algumas outras ideias, nomeadamente as de variáveis "livres" e "ligadas", podemos definir o que é uma sentença (nomeadamente, uma fórmula sem variáveis livres). Fazemos isso não apenas porque torna a definição de "sentença" mais gerenciável, mas também porque será crucial para a maneira como definimos a noção semântica de satisfação.

Vamos definir "fórmula" para uma linguagem simples de primeira ordem, contendo apenas um único símbolo de predicado P e um único símbolo de constante a, e apenas os símbolos lógicos $\neg$, $\land$ e $\exists$. Nossas definições completas serão muito mais gerais: permitiremos infinitos símbolos de predicado e símbolos de constante. De fato, também consideraremos símbolos de função que podem ser combinados com símbolos de constante e variáveis para formar "termos". Por enquanto, a e as variáveis serão nossos únicos termos. Precisamos de infinitas variáveis. Oficialmente usaremos os símbolos v_0, v_1, ..., como variáveis.

Definição 1.1. O conjunto de *fórmulas* Frm é definido da seguinte forma:

fol:int:fml:fmls-atom

1. $P(a)$ e $P(v_i)$ são fórmulas ($i \in \mathbb{N}$).

2. Se φ é uma fórmula, então $\neg\varphi$ é uma fórmula. fol:int:fml:fmls-not

3. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula.

4. Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $\exists x\, \varphi$ é uma fórmula. fol:int:fml:fmls-ex

5. Nada mais é uma fórmula. fol:int:fml:fmls-limit

(1) nos diz que $P(a)$ e $P(v_i)$ são fórmulas, para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Estas são as chamadas fórmulas *atômicas*. Elas nos dão algo com que começar. As outras cláusulas nos dão maneiras de formar novas fórmulas a partir daquelas que já formamos. Assim, por exemplo, por (2), obtemos que $\neg P(v_2)$ é uma fórmula, já que $P(v_2)$ já é uma fórmula por (1). Então, por (4), obtemos que $\exists v_2\, \neg P(v_2)$ é outra fórmula, e assim por diante. (5) nos diz que *somente* cadeias que podemos formar desta maneira contam como fórmulas. Em particular, $\exists v_0\, P(a)$ e $\exists v_0\, \exists v_0\, P(a)$ *contam* como fórmulas, e $(\neg P(a))$ não conta, por causa dos parênteses externos supérfluos.

Esta maneira de definir fórmulas é chamada de *definição indutiva*, e nos permite provar coisas sobre fórmulas usando uma versão de prova por indução chamada *indução estrutural*. Estas são discutidas de maneira geral em **??** e **??**, que você deve revisar antes de mergulhar nas provas mais adiante. Basicamente, a ideia é que, se você quer dar uma prova de que algo é verdadeiro para todas as fórmulas, mostra primeiro que é verdadeiro para as fórmulas atômicas e então que *se* for verdadeiro para qualquer fórmula φ (e ψ), *também* é verdadeiro para $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$ e $\exists x\, \varphi$. Por exemplo, isso prova que é verdadeiro para $\exists v_2\, \neg P(v_2)$: da primeira parte você sabe que é verdadeiro para a fórmula atômica $P(v_2)$. Então obtém que é verdadeiro para $\neg P(v_2)$ pela segunda parte, e novamente que é verdadeiro para $\exists v_2\, \neg P(v_2)$ em si. Como todas as fórmulas são geradas indutivamente a partir de fórmulas atômicas, isso funciona para qualquer uma delas.

1.4 Satisfação

Já podemos avançar para a semântica da lógica de primeira ordem assim que sabemos o que são fórmulas: aqui, a definição básica é a de a estrutura. Para nossa linguagem simples, uma estrutura $\mathfrak{M}$ tem apenas três componentes: um conjunto não vazio $|\mathfrak{M}|$ chamado de *domínio*, o que a designa em $\mathfrak{M}$, e do que P é verdadeiro em $\mathfrak{M}$. O objeto designado por a é denotado por $a^{\mathfrak{M}}$ e o conjunto de coisas das quais P é verdadeiro por $P^{\mathfrak{M}}$. A estrutura $\mathfrak{M}$ consiste apenas nestas três coisas: $|\mathfrak{M}|$, $a^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$ e $P^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|$. O caso geral será mais complicado, pois haverá muitos símbolos de predicado e símbolos de constante, os símbolos de constante podem ter mais de um lugar, e haverá também símbolos de função. fol:int:sat:sec

Isso basta para dar uma definição de satisfação para fórmulas que não contêm variáveis. A ideia é dar uma definição indutiva que espelha a maneira como definimos fórmulas. Especificamos quando uma fórmula atômica é

satisfeita em $\mathfrak{M}$, e então quando, por exemplo, $\neg\varphi$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ com base em se φ é ou não satisfeita em $\mathfrak{M}$. Por exemplo, poderíamos definir:

1. $P(a)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $a^{\mathfrak{M}} \in P^{\mathfrak{M}}$.
2. $\neg\varphi$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, φ não é satisfeita em $\mathfrak{M}$.
3. $(\varphi \wedge \psi)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, φ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ e ψ também é satisfeita em $\mathfrak{M}$.

Digamos que $|\mathfrak{M}| = \{0, 1, 2\}$, $a^{\mathfrak{M}} = 1$ e $P^{\mathfrak{M}} = \{1, 2\}$. Esta definição nos diria que $P(a)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ (pois $a^{\mathfrak{M}} = 1 \in \{1, 2\} = P^{\mathfrak{M}}$). Nos diria ainda que $\neg P(a)$ não é satisfeita em $\mathfrak{M}$, e que, por sua vez, $\neg\neg P(a)$ é, e que $(\neg P(a) \wedge P(a))$ não é satisfeita, e assim por diante.

A dificuldade surge quando queremos dar uma definição para os quantificadores: gostaríamos de dizer algo como: "$\exists v_0\, P(v_0)$ é satisfeita se, e somente se, $P(v_0)$ é satisfeita." Mas a estrutura $\mathfrak{M}$ não nos diz o que fazer com variáveis. O que realmente queremos dizer é que $P(v_0)$ é satisfeita *para algum valor de* v_0. Para tornar isso preciso, precisamos de uma maneira de atribuir membros de $|\mathfrak{M}|$ não apenas a a, mas também a v_0. Para isso, introduzimos *atribuições de variáveis*. Uma atribuição de variáveis é simplesmente uma função s que mapeia variáveis para membros de $|\mathfrak{M}|$ (em nosso exemplo, para um entre 1, 2 ou 3). Como não sabemos de antemão quais variáveis podem aparecer em uma fórmula, não podemos limitar a quais variáveis s atribui valores. A solução simples é exigir que s atribua valores a *todas* as variáveis v_0, v_1, ... Usaremos apenas aquelas de que precisarmos.

Em vez de definir a satisfação de fórmulas apenas em relação a uma estrutura, definiremos em relação a uma estrutura $\mathfrak{M}$ *e* uma atribuição de variáveis s, e escreveremos $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ por brevidade. Nossa definição agora incluirá uma cláusula adicional para lidar com fórmulas atômicas contendo variáveis:

1. $\mathfrak{M}, s \vDash P(a)$ se, e somente se, $a^{\mathfrak{M}} \in P^{\mathfrak{M}}$.
2. $\mathfrak{M}, s \vDash P(v_i)$ se, e somente se, $s(v_i) \in P^{\mathfrak{M}}$.
3. $\mathfrak{M}, s \vDash \neg\varphi$ se, e somente se, não $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$.
4. $\mathfrak{M}, s \vDash (\varphi \wedge \psi)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ e $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$.

Ok, isso resolve um problema: agora podemos dizer quando $\mathfrak{M}$ satisfaz $P(v_0)$ para o valor $s(v_0)$. Para obter a definição correta para $\exists v_0\, P(v_0)$ temos que fazer mais uma coisa: queremos que $\mathfrak{M}, s \vDash \exists v_0\, P(v_0)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s' \vDash P(v_0)$ para *alguma* maneira s' de atribuir um valor a v_0. Mas o valor atribuído a v_0 não precisa necessariamente ser o valor que $s(v_0)$ escolhe. Introduziremos uma notação para isso: se $m \in |\mathfrak{M}|$, então deixamos $s[m/v_0]$ ser a atribuição que é igual a s (para todas as variáveis diferentes de v_0), exceto que a v_0 atribui m. Agora nossa definição pode ser:

5. $\mathfrak{M}, s \vDash \exists v_i\, \varphi$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s[m/v_i] \vDash \varphi$ para algum $m \in |\mathfrak{M}|$.

Funciona? Digamos que $s(v_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. $\mathfrak{M}, s \vDash \exists v_0\, P(v_0)$ se, e somente se, há um $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s[m/v_0] \vDash P(v_0)$. E há: podemos escolher $m = 1$ ou $m = 2$. Note que isso é verdadeiro mesmo que o valor $s(v_0)$ atribuído a v_0 por s—neste caso, 0—não faça o trabalho. Temos $\mathfrak{M}, s[1/v_0] \vDash P(v_0)$, mas não $\mathfrak{M}, s \vDash P(v_0)$.

Se isso parece confuso e trabalhoso: é. Mas a complexidade adicional é necessária para dar uma definição precisa e indutiva de satisfação para todas as fórmulas, e precisamos de algo assim para definir precisamente as noções semânticas. Há outras maneiras de fazer isso, mas todas são igualmente (in)elegantes.

1.5 Sentenças

fol:int:snt:sec

Ok, agora temos uma (esboço de uma) definição de satisfação ("verdadeira em") para estruturas e fórmulas. Mas isso requer um ingrediente adicional—uma atribuição de variável—e o que queríamos era uma definição de sentenças. Como nos livramos das atribuições, e o que são sentenças?

Você provavelmente se lembra de uma discussão, em sua primeira introdução à lógica formal, sobre a relação entre variáveis e quantificadores. Um quantificador é sempre seguido por a variável e, então, na parte da sentença à qual esse quantificador se aplica (seu "escopo"), entendemos que a variável está "ligada" a esse quantificador. Em fórmulas, não se exigia que toda variável tivesse um quantificador correspondente, e as variáveis sem quantificadores correspondentes são "livres" ou "não ligadas". Tomaremos as sentenças como sendo todas aquelas fórmulas que não têm variáveis livres.

Novamente, a ideia intuitiva de quando uma ocorrência de a variável em a fórmula φ está ligada, de qual quantificador a liga e de quando ela é livre não é difícil de captar. Você pode ter aprendido um método para testar isso, talvez envolvendo a contagem de parênteses. Temos que insistir em uma definição precisa—e, como definimos fórmulas por indução, podemos dar uma definição das ocorrências livres e ligadas de a variável x em a fórmula φ também por indução. Por exemplo, ela poderia ter este aspecto para nossa linguagem simplificada:

1. Se φ é atômica, todas as ocorrências de x nela são livres (isto é, a ocorrência de x em $P(x)$ é livre).

2. Se φ é da forma $\neg\psi$, então uma ocorrência de x em $\neg\psi$ é livre se, e somente se, a ocorrência correspondente de x for livre em ψ (isto é, as ocorrências livres de variáveis em ψ são exatamente as ocorrências correspondentes em $\neg\psi$).

3. Se φ é da forma $(\psi \wedge \chi)$, então uma ocorrência de x em $(\psi \wedge \chi)$ é livre se, e somente se, a ocorrência correspondente de x for livre em ψ ou em χ.

4. Se φ é da forma $\exists x\, \psi$, então nenhuma ocorrência de x em φ é livre; se é da forma $\exists y\, \psi$, em que y é uma variável diferente de x, então uma ocorrência

de x em $\exists y\, \psi$ é livre se, e somente se, a ocorrência correspondente de x for livre em ψ.

Uma vez que tenhamos uma definição precisa de ocorrências livres e ligadas de variáveis, podemos simplesmente dizer: a sentença é qualquer fórmula sem ocorrências livres de variáveis.

1.6 Noções Semânticas

fol:int:sem:sec

Mencionamos acima que, quando consideramos se $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ vale, (por conveniência) deixamos s atribuir valores a todas as variáveis, mas apenas os valores que atribui às variáveis em φ são usados. De fato, são apenas os valores das variáveis *livres* em φ que importam. É claro que, por sermos cuidadosos, vamos provar esse fato. Como as sentenças não têm variáveis livres, s não importa de modo algum quando se trata de saber se são satisfeitas em a estrutura. Assim, quando φ é a sentença, podemos definir $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ como significando "$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ para todo s," o que, aliás, é verdadeiro se, e somente se, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ para pelo menos um s. Precisamos introduzir atribuições de variáveis para obter uma definição funcional de satisfação para fórmulas, mas para sentenças, a satisfação é independente das atribuições de variáveis.

Uma vez que temos uma definição de "$\mathfrak{M} \vDash \varphi$," sabemos o que "caso" e "verdadeira em" significam no que diz respeito às sentenças da lógica de primeira ordem. Com base na definição de $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para sentenças, podemos então definir as noções semânticas básicas de validade, consequência e satisfatibilidade. Uma sentença é válida, $\vDash \varphi$, se toda estrutura a satisfaz. Ela é consequência de um conjunto de sentenças, $\Gamma \vDash \varphi$, se toda estrutura que satisfaz todas as sentenças em Γ também satisfaz φ. E um conjunto de sentenças é satisfatível se alguma estrutura satisfaz todas as sentenças nele ao mesmo tempo.

Como as fórmulas são definidas indutivamente, e a satisfação é, por sua vez, definida por indução na estrutura das fórmulas, podemos usar indução para provar propriedades da nossa semântica e relacionar as noções semânticas definidas. Vamos reunir e provar algumas dessas propriedades, em parte porque são individualmente interessantes, mas principalmente porque muitas delas serão úteis quando formos investigar a relação entre semântica e sistemas de derivação. Para isso, também teremos que definir (precisamente, isto é, por indução) algumas noções sintáticas e operações que ainda não mencionamos.

1.7 Substituição

fol:int:sub:sec

Discutiremos um exemplo para ilustrar como as coisas se articulam e como o desenvolvimento da sintaxe e da semântica estabelece as bases para nossas investigações mais avançadas posteriormente. Nossos sistemas de derivação deveriam permitir-nos derivar $P(a)$ de $\forall v_0\, P(v_0)$. Talvez até queiramos afirmar isso como uma regra de inferência. No entanto, para fazê-lo, devemos ser capazes de enunciá-lo nos termos mais gerais: não apenas para P, a e v_0, mas

para qualquer fórmula φ, e termo t, e variável x. (Lembre-se de que símbolos de constante são termos, mas vamos considerar também termos mais complicados construídos a partir de símbolos de constante e símbolos de função.) Então, queremos ser capazes de dizer algo como, "sempre que você tiver derivado $\forall x\, \varphi(x)$ você está justificado ao inferir $\varphi(t)$—o resultado da remoção de $\forall x$ e substituindo x por t." Mas o que exatamente significa "substituir x por t"? Qual é a relação entre $\varphi(x)$ e $\varphi(t)$? Isso sempre funciona?

Para tornar isso preciso, definimos a operação de *substituição*. A substituição é realmente complicada, porque não podemos simplesmente substituir todos os x em φ por t, e nem todos os t podem ser substituídos por qualquer x. Lidaremos com isso novamente usando definições indutivas. Mas uma vez feito isso, especificando uma regra de inferência como "inferir $\varphi(t)$ de $\forall x\, \varphi(x)$" torna-se uma definição precisa. Além disso, seremos capazes de mostrar que esta é uma boa regra de inferência no sentido de que $\varphi(t)$ é consequência de $\forall x\, \varphi(x)$. Mas para provar isso, temos de provar novamente algo que à primeira vista pode levá-lo a perguntar "por que estamos fazendo isso?" Que $\varphi(t)$ seja consequência de $\forall x\, \varphi(x)$ depende do fato de que se $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$ vale ou não depende apenas do valor do termo t, ou seja, se deixarmos m ser qualquer membro de $|\mathfrak{M}|$ que for selecionado por t, então $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi(x)$. Isso vale mesmo quando t contém variáveis, mas teremos que ter cuidado com a forma exata como declaramos o resultado.

1.8 Modelos e Teorias

fol:int:mod:sec

Uma vez que definimos a sintaxe e a semântica da lógica de primeira ordem, podemos trabalhar investigando as propriedades de estruturas e as noções semânticas. Também podemos definir sistemas de derivação e investigá-los. Para um conjunto de sentenças, podemos perguntar: quais estruturas tornam todas as sentenças desse conjunto verdadeiras? Dado um conjunto de sentenças Γ, uma estrutura $\mathfrak{M}$ que as satisfaz é chamada de *modelo de* Γ. Podemos começar de Γ e tentar encontrar seus modelos—como eles são? Quão grandes ou pequenos precisam ser? Mas também podemos começar com uma única estrutura ou coleção de estruturas e perguntar: quais sentenças são verdadeiras nelas? Há sentenças que *caracterizam* essas estruturas no sentido de que elas, e somente elas, são verdadeiras nelas? Esses tipos de questões são o domínio da *teoria dos modelos*. Elas também fundamentam o *método axiomático*: descrever uma coleção de estruturas por um conjunto de sentenças, os axiomas de uma teoria. Isso é possível pela observação de que exatamente aquelas sentenças que são consequência na lógica de primeira ordem dos axiomas são verdadeiras em todos os modelos dos axiomas.

Como exemplo muito simples, considere pré-ordens. Uma pré-ordem é uma relação R sobre algum conjunto A que é reflexiva e transitiva. Um conjunto A com uma relação binária $R \subseteq A \times A$ sobre ele é exatamente o que precisaríamos para dar uma estrutura para uma linguagem de primeira ordem com um único símbolo de predicado de dois lugares P: definiríamos $|\mathfrak{M}| = A$ e $P^{\mathfrak{M}} = R$.

Como R é uma pré-ordem, é reflexiva e transitiva, e podemos encontrar um conjunto Γ de sentenças da lógica de primeira ordem que diz isso:

$$\forall v_0\, P(v_0, v_0)$$
$$\forall v_0\, \forall v_1\, \forall v_2\, ((P(v_0, v_1) \land P(v_1, v_2)) \to P(v_0, v_2))$$

Estas sentenças são apenas as simbolizações de "para todo x, Rxx" (R é reflexiva) e "sempre que Rxy e Ryz, então também Rxz" (R é transitiva). Vemos que uma estrutura $\mathfrak{M}$ é um modelo dessas duas sentenças Γ se, e somente se, R (isto é, $P^{\mathfrak{M}}$), é uma pré-ordem sobre A (isto é, $|\mathfrak{M}|$). Em outras palavras, os modelos de Γ são exatamente as pré-ordens. Qualquer propriedade de todas as pré-ordens que possa ser expressa na linguagem de primeira ordem apenas com P como símbolo de predicado (como reflexividade e transitividade acima), é consequência das duas sentenças em Γ e vice-versa. Assim, qualquer coisa que possamos provar sobre modelos de Γ provamos sobre todas as pré-ordens.

Para qualquer teoria particular e classe de modelos (como Γ e todas as pré-ordens), haverá questões interessantes sobre o que pode ser expresso na linguagem de primeira ordem correspondente, e o que não pode ser expresso. Há algumas propriedades de estruturas que são interessantes para todas as linguagens e classes de modelos, a saber, aquelas que dizem respeito ao tamanho do domínio. Pode-se sempre expressar, por exemplo, que o domínio contém exatamente n membros, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$. Pode-se também expressar, usando um conjunto de infinitas sentenças, que o domínio é infinito. Mas não se pode expressar que o domínio é finito, ou que o domínio é não enumerável. Estes resultados sobre as limitações das linguagens de primeira ordem são consequências dos teoremas da compacidade e de Löwenheim–Skolem.

1.9 Correção e Completude

fol:int:scp:sec

Também introduziremos sistemas de derivação para a lógica de primeira ordem. Há muitos sistemas de derivação que os lógicos desenvolveram, mas todos definem a mesma relação de derivabilidade entre sentenças. Dizemos que Γ *deriva* φ, $\Gamma \vdash \varphi$, se há uma derivação de um certo tipo precisamente definido. As derivações são sempre disposições finitas de símbolos—talvez uma lista de sentenças, ou alguma estrutura mais complicada. O propósito dos sistemas de derivação é fornecer uma ferramenta para determinar se uma sentença é consequência de algum conjunto Γ. Para servir a esse propósito, deve ser verdade que $\Gamma \vDash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$.

Se $\Gamma \vdash \varphi$ mas não $\Gamma \vDash \varphi$, nosso sistema de derivação seria forte demais, provaria demais. A propriedade de que se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \vDash \varphi$ é chamada de *correção*, e é um requisito mínimo para qualquer bom sistema de derivação. Por outro lado, se $\Gamma \vDash \varphi$ mas não $\Gamma \vdash \varphi$, então nosso sistema de derivação é fraco demais, não prova o suficiente. A propriedade de que se $\Gamma \vDash \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$ é chamada de *completude*. A correção é usualmente relativamente fácil de provar (por indução na estrutura das derivações, que são definidas indutivamente). A completude é mais difícil de provar.

Correção e completude têm várias consequências importantes. Se um conjunto de sentenças Γ deriva uma contradição (como $\varphi \wedge \neg\varphi$), ele é chamado de *inconsistente*. Γs inconsistentes não podem ter modelos; são insatisfatíveis. Da completude segue a contrapositiva: qualquer Γ que não seja inconsistente—ou, como diremos, *consistente*—tem um modelo. De fato, isso é equivalente à completude, e é a forma de completude que de fato provaremos. É um resultado profundo e talvez surpreendente: apenas o fato de que você não pode provar $\varphi \wedge \neg\varphi$ a partir de Γ garante que há uma estrutura que é como Γ a descreve. Assim, a completude dá uma resposta à pergunta: quais conjuntos de sentenças têm modelos? Resposta: todos e somente os conjuntos consistentes têm.

Os teoremas de correção e completude têm duas consequências importantes: a compacidade e o teorema de Löwenheim–Skolem. Estes são resultados importantes na teoria de modelos e podem ser usados para estabelecer muitos resultados interessantes. Já mencionamos dois: a lógica de primeira ordem não pode expressar que o domínio de uma estrutura é finito ou que é não enumerável.

Historicamente, tudo isso—como definir a sintaxe e a semântica da lógica de primeira ordem, como definir bons sistemas de derivação, como provar que são corretos e completos, ficar claro sobre o que pode e não pode ser expresso em linguagens de primeira ordem—levou muito tempo para ser descoberto e acertado. Agora sabemos como fazer isso, mas percorrer todos os detalhes ainda pode ser confuso e tedioso. Mas também é importante, porque os métodos desenvolvidos aqui para a linguagem formal da lógica de primeira ordem são aplicados em todo lugar em lógica, ciência da computação e linguística. Assim, trabalhar os detalhes compensa a longo prazo.

Capítulo 2

Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

2.1 Introdução

fol:syn:itx:sec

Para desenvolver a teoria e a metateoria da lógica de primeira ordem, devemos primeiro definir a sintaxe e a semântica de suas expressões. As expressões da lógica de primeira ordem são termos e fórmulas. Termos são formados a partir de variáveis, símbolos de constante e símbolos de função. Fórmulas, por sua vez, são formadas a partir de símbolos de predicado juntamente com termos (estes formam as menores fórmulas, as "atômicas"), e então, a partir de fórmulas atômicas, podemos formar outras mais complexas usando conectivos lógicos e quantificadores. Há muitas maneiras diferentes de estabelecer as regras de formação; damos apenas uma possível. Outros sistemas escolherão símbolos diferentes, selecionarão conjuntos diferentes de conectivos como primitivos, usarão parênteses de forma diferente (ou nem mesmo os usarão, como no caso da chamada notação polonesa). O que todas as abordagens têm em comum, no entanto, é que as regras de formação definem o conjunto de termos e fórmulas *indutivamente*. Se feito corretamente, cada expressão pode resultar essencialmente de uma única maneira de acordo com as regras de formação. A definição indutiva que resulta em expressões que são *de leitura única* significa que podemos dar significados a essas expressões usando o mesmo método—a definição indutiva.

2.2 Linguagens de Primeira Ordem

fol:syn:fol:sec

As expressões da lógica de primeira ordem são construídas a partir de um vocabulário básico contendo *variáveis*, *símbolos de constante*, *símbolos de predicado* e às vezes *símbolos de função*. A partir deles, juntamente com conectivos lógicos, quantificadores e símbolos de pontuação como parênteses e vírgulas, formam-se *termos* e *fórmulas*.

explanation

Informalmente, símbolos de predicado são nomes para propriedades e relações, símbolos de constante são nomes para objetos individuais, e símbolos de função são nomes para mapeamentos. Estes, exceto a predicado de identidade $=$, são os *símbolos não lógicos* e juntos constituem uma linguagem. Qualquer linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ é determinada por seus símbolos não lógicos. No caso mais geral, $\mathcal{L}$ contém infinitos símbolos de cada tipo.

No caso geral, fazemos uso dos seguintes símbolos na lógica de primeira ordem:

1. Símbolos lógicos
   a) Conectivos lógicos: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\to$ (condicional), $\leftrightarrow$ (bicondicional), $\forall$ (quantificador universal), $\exists$ (quantificador existencial).
   b) A constante proposicional para falsidade $\bot$.
   c) A constante proposicional para verdade $\top$.
   d) A predicado de identidade de dois lugares $=$.
   e) Um conjunto infinito enumerável de variáveis: v_0, v_1, v_2, ...
2. Símbolos não lógicos, que constituem a *linguagem padrão* da lógica de primeira ordem
   a) Um conjunto infinito enumerável de símbolos de predicado de n lugares para cada $n > 0$: A^n_0, A^n_1, A^n_2, ...
   b) Um conjunto infinito enumerável de símbolos de constante: c_0, c_1, c_2, ...
   c) Um conjunto infinito enumerável de símbolos de função de n lugares para cada $n > 0$: f^n_0, f^n_1, f^n_2, ...
3. Sinais de pontuação: (,) e a vírgula.

A maioria de nossas definições e resultados será formulada para a linguagem padrão completa da lógica de primeira ordem. No entanto, dependendo da aplicação, também podemos restringir a linguagem a apenas alguns símbolos de predicado, símbolos de constante e símbolos de função.

Exemplo 2.1. A linguagem $\mathcal{L}_A$ da aritmética contém um único símbolo de predicado de dois lugares $<$, um único símbolo de constante $\mathsf{0}$, um símbolo de função de um lugar $\prime$, e dois símbolos de função de dois lugares $+$ e $\times$.

Exemplo 2.2. A linguagem da teoria dos conjuntos $\mathcal{L}_Z$ contém apenas o único símbolo de predicado de dois lugares $\in$.

Exemplo 2.3. A linguagem das ordens $\mathcal{L}_\leq$ contém apenas o símbolo de predicado de dois lugares $\leq$.

Novamente, estas são convenções: oficialmente, estes são apenas apelidos, por exemplo, $<$, $\in$ e $\leq$ são apelidos para A^2_0, 0 para c_0, $'$ para f^1_0, $+$ para f^2_0, $\times$ para f^2_1.

.

intro

Você pode estar familiarizado com terminologia e símbolos diferentes dos que usamos acima. Textos de lógica (e professores) comumente usam $\sim$, $\neg$, ou $!$ para "negação", $\wedge$, $\cdot$, ou $\&$ para "conjunção". Símbolos comumente usados para o "condicional" ou "implicação" são $\rightarrow$, $\Rightarrow$, e $\supset$. Símbolos para "bicondicional", "bi-implicação", ou "equivalência (material)" são $\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, e $\equiv$. O símbolo $\bot$ é chamado de várias formas: "falsidade", "falsum", "absurdo", ou "bottom". O símbolo $\top$ é chamado de várias formas: "verdade", "verum", ou "top".

É convencional usar letras minúsculas (por exemplo, a, b, c) do início do alfabeto latino para símbolos de constante (às vezes chamados de nomes), e letras minúsculas do final (por exemplo, x, y, z) para variáveis. Quantificadores combinam-se com variáveis, por exemplo, x; variações notacionais incluem $\forall x$, $(\forall x)$, (x), Πx, $\bigwedge_x$ para o quantificador universal e $\exists x$, $(\exists x)$, (Ex), Σx, $\bigvee_x$ para o quantificador existencial.

explanation

Poderíamos tratar todos os operadores proposicionais e ambos os quantificadores como símbolos primitivos da linguagem. Poderíamos, em vez disso, escolher um estoque menor de símbolos primitivos e tratar os outros operadores lógicos como definidos. Conjuntos "funcionalmente completos para a verdade" de operadores booleanos incluem $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, e $\{\neg, \rightarrow\}$—estes podem ser combinados com qualquer um dos quantificadores para uma linguagem de primeira ordem expressivamente completa.

Você pode estar familiarizado com dois outros operadores lógicos: a barra de Sheffer $|$ (em homenagem a Henry Sheffer), e a seta de Peirce $\downarrow$, também conhecida como adaga de Quine. Quando recebem suas leituras usuais de "nand" e "nor" (respectivamente), esses operadores são funcionalmente completos para a verdade por si sós.

2.3 Termos e Fórmulas

fol:syn:frm:sec

Uma vez dada uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$, podemos definir expressões construídas a partir do vocabulário básico de $\mathcal{L}$. Estas incluem, em particular, *termos* e *fórmulas*.

fol:syn:frm:defn:terms

Definição 2.4 (Termos). O conjunto de *termos* $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ é definido indutivamente por:

1. Toda variável é um termo.
2. Todo símbolo de constante de $\mathcal{L}$ é um termo.
3. Se f é um símbolo de função de n lugares e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.
4. Nada mais é um termo.

Um termo que não contém variáveis é um *termo fechado*.

explanation

Os símbolos de constante aparecem em nossa especificação da linguagem e dos termos como uma categoria separada de símbolos, mas eles poderiam, em vez disso, ter sido incluídos como símbolos de função de zero lugares. Poderíamos então dispensar a segunda cláusula da definição de termos. Bastaria entender $f(t_1, \ldots, t_n)$ como apenas f sozinho se $n = 0$.

Definição 2.5 (Fórmulas). O conjunto de *fórmulas* $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ da linguagem $\mathcal{L}$ é definido indutivamente como segue: fol:syn:frm:defn:formulas

1. $\bot$ é uma fórmula atômica.
2. $\top$ é uma fórmula atômica.
3. Se R é um símbolo de predicado de n lugares de $\mathcal{L}$ e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$, então $R(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica.
4. Se t_1 e t_2 são termos de $\mathcal{L}$, então $=(t_1, t_2)$ é uma fórmula atômica.
5. Se φ é a fórmula, então $\neg\varphi$ é a fórmula.
6. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é a fórmula.
7. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é a fórmula.
8. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \to \psi)$ é a fórmula.
9. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é a fórmula.
10. Se φ é a fórmula e x é a variável, então $\forall x\, \varphi$ é a fórmula.
11. Se φ é a fórmula e x é a variável, então $\exists x\, \varphi$ é a fórmula.
12. Nada mais é a fórmula.

explanation

As definições do conjunto de termos e do conjunto de fórmulas são *definições indutivas*. Essencialmente, construímos o conjunto de fórmulas em infinitos estágios. No estágio inicial, declaramos que todas as fórmulas atômicas são fórmulas; isso corresponde aos primeiros casos da definição, isto é, os casos para $\top$, $\bot$, $R(t_1, \ldots, t_n)$ e $=(t_1, t_2)$. "Fórmula atômica" significa, portanto, qualquer fórmula desta forma.

Os outros casos da definição dão regras para construir novas fórmulas a partir de fórmulas já construídas. No segundo estágio, podemos usá-los para construir fórmulas a partir de fórmulas atômicas. No terceiro estágio, construímos novas fórmulas a partir das fórmulas atômicas e daquelas obtidas no segundo estágio, e assim por diante. Uma fórmula é qualquer coisa que seja eventualmente construída em tal estágio, e nada mais.

Por convenção, escrevemos $=$ entre seus argumentos e omitimos os parênteses: $t_1 = t_2$ é uma abreviação para $=(t_1, t_2)$. Além disso, $\neg=(t_1, t_2)$ é abreviado como $t_1 \neq t_2$. Ao escrever uma fórmula $(\psi * \chi)$ construída a partir de ψ, χ

usando um conectivo de dois lugares $*$, frequentemente omitiremos o par de parênteses mais externo e escreveremos simplesmente $\psi * \chi$.

Alguns textos de lógica exigem que a variável x deva ocorrer em φ para que $\exists x\, \varphi$ e $\forall x\, \varphi$ contem como fórmulas. Nada de ruim acontece se você não exigir isso, e isso torna as coisas mais fáceis. intro

Se trabalhamos em uma linguagem para uma aplicação específica, frequentemente escreveremos símbolos de predicado e símbolos de função de dois lugares entre os respectivos termos, por exemplo, $t_1 < t_2$ e $(t_1 + t_2)$ na linguagem da aritmética e $t_1 \in t_2$ na linguagem da teoria dos conjuntos. A função sucessora na linguagem da aritmética é até escrita convencionalmente *depois* de seu argumento: t'. Oficialmente, no entanto, estas são apenas abreviações convencionais para $A^2_0(t_1, t_2)$, $f^2_0(t_1, t_2)$, $A^2_0(t_1, t_2)$ e $f^1_0(t)$, respectivamente.

Definição 2.6 (Identidade sintática). O símbolo $\equiv$ expressa a identidade sintática entre cadeias de símbolos, isto é, $\varphi \equiv \psi$ sse φ e ψ são cadeias de símbolos do mesmo comprimento e que contêm o mesmo símbolo em cada posição.

O símbolo $\equiv$ pode ser ladeado por cadeias obtidas por concatenação, por exemplo, $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ significa: a cadeia de símbolos φ é a mesma cadeia que aquela obtida concatenando um parêntese de abertura, a cadeia ψ, o símbolo $\vee$, a cadeia χ, e um parêntese de fechamento, nesta ordem. Se este é o caso, então sabemos que o primeiro símbolo de φ é um parêntese de abertura, φ contém ψ como uma subcadeia (começando no segundo símbolo), essa subcadeia é seguida por $\vee$, etc.

Como termos e fórmulas são construídos a partir de elementos básicos via definições indutivas, podemos usar os seguintes princípios de indução para provar coisas sobre eles.

fol:syn:frm: lem:trmind

Lema 2.7 (*Princípio de indução sobre termos*). *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Se uma propriedade P é tal que*

1. *ela vale para toda variável v,*
2. *ela vale para todo símbolo de constante a de $\mathcal{L}$, e*
3. *ela vale para $f(t_1, \ldots, t_n)$ sempre que vale para $t_1, \ldots, t_n$ e f é um símbolo de função de n lugares de $\mathcal{L}$*

(supondo que $t_1, \ldots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$), então P vale para todo termo em $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})$.

Problema 2.1. Prove Lema 2.7.

fol:syn:frm: thm:frmind

Lema 2.8 (*Princípio de indução sobre fórmulas*). *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem. Se uma propriedade P vale para todas as fórmulas atômicas e é tal que*

1. *ela vale para $\neg\varphi$ sempre que vale para φ;*

2. *ela vale para* $(\varphi \wedge \psi)$ *sempre que vale para* φ *e* ψ*;*

3. *ela vale para* $(\varphi \vee \psi)$ *sempre que vale para* φ *e* ψ*;*

4. *ela vale para* $(\varphi \to \psi)$ *sempre que vale para* φ *e* ψ*;*

5. *ela vale para* $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *sempre que vale para* φ *e* ψ*;*

6. *ela vale para* $\exists x\, \varphi$ *sempre que vale para* φ*;*

7. *ela vale para* $\forall x\, \varphi$ *sempre que vale para* φ*;*

(supondo que φ *e* ψ *são fórmulas de* $\mathcal{L}$*), então* P *vale para todas as fórmulas em* $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$.

2.4 Leitura Única

explanation

A maneira como definimos fórmulas garante que toda fórmula tem uma *leitura única*, isto é, há essencialmente apenas uma maneira de construí-la de acordo com nossas regras de formação para fórmulas e apenas uma maneira de "interpretá-la". Se não fosse assim, teríamos fórmulas ambíguas, isto é, fórmulas que têm mais de uma leitura ou interpretação—e isso é claramente algo que queremos evitar. Mas, mais importante, sem essa propriedade, a maioria das definições e provas que vamos dar não funcionaria.

fol:syn:unq:sec

Talvez a melhor maneira de deixar isso claro seja ver o que aconteceria se tivéssemos dado regras ruins para formar fórmulas que não garantissem a leitura única. Por exemplo, poderíamos ter esquecido os parênteses nas regras de formação para conectivos, por exemplo, poderíamos ter permitido isto:

> Se φ e ψ são fórmulas, então $\varphi \to \psi$ também é.

Partindo de uma fórmula atômica θ, isso nos permitiria formar $\theta \to \theta$. A partir disso, juntamente com θ, obteríamos $\theta \to \theta \to \theta$. Mas há duas maneiras de fazer isso:

1. Tomamos θ como φ e $\theta \to \theta$ como ψ.

2. Tomamos φ como $\theta \to \theta$ e ψ é θ.

Correspondentemente, há duas maneiras de "ler" a fórmula $\theta \to \theta \to \theta$. Ela é da forma $\psi \to \chi$ onde ψ é θ e χ é $\theta \to \theta$, mas *ela é também* da forma $\psi \to \chi$ com ψ sendo $\theta \to \theta$ e χ sendo θ.

Se isso acontece, nossas definições nem sempre funcionarão. Por exemplo, quando definimos o operador principal de uma fórmula, dizemos: em uma fórmula da forma $\psi \to \chi$, o operador principal é a ocorrência indicada de $\to$. Mas se podemos casar a fórmula $\theta \to \theta \to \theta$ com $\psi \to \chi$ das duas maneiras diferentes mencionadas acima, então em um caso obtemos a primeira ocorrência de $\to$ como o operador principal, e no segundo caso a segunda ocorrência. Mas pretendemos que o operador principal seja uma *função* da fórmula, isto é, toda fórmula deve ter exatamente uma ocorrência de operador principal.

Lema 2.9. *O número de parênteses esquerdos e direitos em a fórmula φ é igual.*

Prova. Provamos isso por indução sobre a maneira como φ é construída. Isso requer duas coisas: (a) Temos primeiro que provar que todas as fórmulas atômicas têm a propriedade em questão (a base da indução). (b) Então temos que provar que, quando construímos novas fórmulas a partir de fórmulas dadas, as novas fórmulas têm a propriedade, desde que as antigas a tenham.

Seja $l(\varphi)$ o número de parênteses esquerdos, e $r(\varphi)$ o número de parênteses direitos em φ, e $l(t)$ e $r(t)$ similarmente o número de parênteses esquerdos e direitos em um termo t.

Problema 2.2. Prove que, para qualquer termo t, $l(t) = r(t)$.

1. $\varphi \equiv \bot$: φ tem 0 parênteses esquerdos e 0 parênteses direitos.
2. $\varphi \equiv \top$: φ tem 0 parênteses esquerdos e 0 parênteses direitos.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$: $l(\varphi) = 1 + l(t_1) + \cdots + l(t_n) = 1 + r(t_1) + \cdots + r(t_n) = r(\varphi)$. Aqui usamos o fato, deixado como exercício, de que $l(t) = r(t)$ para qualquer termo t.
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $l(\varphi) = l(t_1) + l(t_2) = r(t_1) + r(t_2) = r(\varphi)$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: Por hipótese de indução, $l(\psi) = r(\psi)$. Assim $l(\varphi) = l(\psi) = r(\psi) = r(\varphi)$.
6. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: Por hipótese de indução, $l(\psi) = r(\psi)$ e $l(\chi) = r(\chi)$. Assim $l(\varphi) = 1 + l(\psi) + l(\chi) = 1 + r(\psi) + r(\chi) = r(\varphi)$.
7. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: Por hipótese de indução, $l(\psi) = r(\psi)$. Assim, $l(\varphi) = l(\psi) = r(\psi) = r(\varphi)$.
8. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: Analogamente. □

Definição 2.10 (Prefixo próprio). Uma cadeia de símbolos ψ é um *prefixo próprio* de uma cadeia de símbolos φ se a concatenação de ψ e uma cadeia de símbolos não vazia resulta em φ.

fol:syn:unq: lem:no-prefix

Lema 2.11. *Se φ é a fórmula, e ψ é um prefixo próprio de φ, então ψ não é a fórmula.*

Prova. Exercício. □

Problema 2.3. Prove Lema 2.11.

fol:syn:unq: prop:unique-atomic

Proposição 2.12. *Se φ é uma fórmula atômica, então ela satisfaz uma, e apenas uma, das seguintes condições.*

1. $\varphi \equiv \bot$.
2. $\varphi \equiv \top$.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$ *onde* R *é um símbolo de predicado de* n *lugares,* t_1, $\ldots$, t_n *são termos, e cada um de* R, t_1, $\ldots$, t_n *é determinado de forma única.*
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$ *onde* t_1 *e* t_2 *são termos determinados de forma única.*

Prova. Exercício. □

Problema 2.4. Prove Proposição 2.12 (Dica: Formule e prove uma versão de Lema 2.11 para termos.)

Proposição 2.13 (Leitura Única). *Toda fórmula satisfaz uma, e apenas uma, das seguintes condições.*

1. φ *é atômica.*
2. φ *é da forma* $\neg\psi$.
3. φ *é da forma* $(\psi \wedge \chi)$.
4. φ *é da forma* $(\psi \vee \chi)$.
5. φ *é da forma* $(\psi \to \chi)$.
6. φ *é da forma* $(\psi \leftrightarrow \chi)$.
7. φ *é da forma* $\forall x\, \psi$.
8. φ *é da forma* $\exists x\, \psi$.

Além disso, em cada caso ψ, *ou* ψ *e* χ, *são determinados de forma única. Isso significa que, por exemplo, não há pares diferentes* ψ, χ *e* ψ', χ' *tais que* φ *seja ao mesmo tempo da forma* $(\psi \to \chi)$ *e* $(\psi' \to \chi')$.

Prova. As regras de formação exigem que, se a fórmula não é atômica, ela deve começar com um parêntese de abertura (, $\neg$, ou um quantificador. Por outro lado, toda fórmula que começa com um dos seguintes símbolos deve ser atômica: a símbolo de predicado, a símbolo de função, a símbolo de constante, $\bot$, $\top$.

Então, na verdade só temos que mostrar que se φ é da forma $(\psi * \chi)$ e também da forma $(\psi' *' \chi')$, então $\psi \equiv \psi'$, $\chi \equiv \chi'$, e $* = *'$.

Então suponha que tanto $\varphi \equiv (\psi * \chi)$ quanto $\varphi \equiv (\psi' *' \chi')$. Então ou $\psi \equiv \psi'$ ou não. Se for, claramente $* = *'$ e $\chi \equiv \chi'$, pois elas então são subcadeias de φ que começam no mesmo lugar e têm o mesmo comprimento. O outro caso é $\psi \not\equiv \psi'$. Como ψ e ψ' são ambas subcadeias de φ que começam no mesmo lugar, uma deve ser um prefixo próprio da outra. Mas isso é impossível por Lema 2.11. □

2.5 Operador principal de uma Fórmula

fol:syn:mai:sec

Frequentemente é útil falar sobre o último operador usado na construção de a fórmula φ. Esse operador é chamado de *operador principal* de φ. Intuitivamente, é o operador "mais externo" de φ. Por exemplo, o operador principal de $\neg\varphi$ é $\neg$, o operador principal de $(\varphi \vee \psi)$ é $\vee$, etc. explanation

fol:syn:mai:def:main-op

Definição 2.14 (Operador principal). O *operador principal* de a fórmula φ é definido como segue:

1. φ is atomic: φ não tem operador principal.
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: o operador principal de φ é $\neg$.
3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: o operador principal de φ é $\wedge$.
4. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: o operador principal de φ é $\vee$.
5. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: o operador principal de φ é $\to$.
6. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: o operador principal de φ é $\leftrightarrow$.
7. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: o operador principal de φ é $\forall$.
8. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: o operador principal de φ é $\exists$.

Em cada caso, pretendemos a *ocorrência* específica indicada do operador principal na fórmula. Por exemplo, como a fórmula $((\theta \to \alpha) \to (\alpha \to \theta))$ é da forma $(\psi \to \chi)$ onde ψ é $(\theta \to \alpha)$ e χ é $(\alpha \to \theta)$, a segunda ocorrência de $\to$ é o operador principal.

Esta é uma definição *recursiva* de uma função que mapeia todas as fórmulas não atômicas para sua ocorrência de operador principal. Por causa da maneira como as fórmulas são definidas indutivamente, toda fórmula φ satisfaz um dos casos em Definição 2.14. Isso garante que, para cada fórmula φ não atômica, existe um operador principal. Como cada fórmula satisfaz apenas uma dessas condições, e como as fórmulas menores a partir das quais φ é construída são determinadas de forma única em cada caso, a ocorrência de operador principal de φ é única, e assim definimos uma função. explanation

Chamamos as fórmulas pelos nomes em Tabela 2.1 dependendo de qual símbolo é seu operador principal.

2.6 Subfórmulas

fol:syn:sbf:sec

Frequentemente é útil falar sobre as fórmulas que "compõem" uma dada fórmula. Chamamos estas de suas *subfórmulas*. Qualquer fórmula conta como a subfórmula de si mesma; uma subfórmula de φ diferente do próprio φ é uma *subfórmula própria*. explanation

Definição 2.15 (Subfórmula imediata). Se φ é a fórmula, as *subfórmulas imediatas* de φ são definidas indutivamente como segue:

Operador principal	Tipo de fórmula	Exemplo
nenhum	(fórmula) atômica	$\bot$, $\top$, $R(t_1, \ldots, t_n)$, $t_1 = t_2$
$\neg$	negação	$\neg\varphi$
$\wedge$	conjunção	$(\varphi \wedge \psi)$
$\vee$	disjunção	$(\varphi \vee \psi)$
$\rightarrow$	condicional	$(\varphi \rightarrow \psi)$
$\leftrightarrow$	bicondicional	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
$\forall$	(fórmula) universal	$\forall x\, \varphi$
$\exists$	(fórmula) existencial	$\exists x\, \varphi$

Tabela 2.1: Operador principal e nomes de fórmulas

fol:syn:mai: tab:main-op

1. Fórmulas atômicas não têm subfórmulas imediatas.
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: A única subfórmula imediata de φ é ψ.
3. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: As subfórmulas imediatas de φ são ψ e χ ($*$ é qualquer um dos conectivos de dois lugares).
4. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: A única subfórmula imediata de φ é ψ.
5. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: A única subfórmula imediata de φ é ψ.

Definição 2.16 (Subfórmula própria). Se φ é a fórmula, as *subfórmulas próprias* de φ são definidas recursivamente como segue:

1. Fórmulas atômicas não têm subfórmulas próprias.
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: As subfórmulas próprias de φ são ψ juntamente com todas as subfórmulas próprias de ψ.
3. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: As subfórmulas próprias de φ são ψ, χ, juntamente com todas as subfórmulas próprias de ψ e as de χ.
4. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: As subfórmulas próprias de φ são ψ juntamente com todas as subfórmulas próprias de ψ.
5. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: As subfórmulas próprias de φ são ψ juntamente com todas as subfórmulas próprias de ψ.

Definição 2.17 (Subfórmula). As subfórmulas de φ são o próprio φ juntamente com todas as suas subfórmulas próprias.

explanation

Note a diferença sutil em como definimos subfórmulas imediatas e subfórmulas próprias. No primeiro caso, definimos diretamente as subfórmulas imediatas de uma fórmula φ para cada forma possível de φ. É uma definição explícita por casos, e os casos espelham a definição indutiva do conjunto de fórmulas. No segundo caso, também espelhamos a maneira como o conjunto de todas as fórmulas é definido, mas em cada caso também incluímos as subfórmulas

próprias das fórmulas menores ψ, χ além dessas próprias fórmulas. Isso torna a definição *recursiva*. Em geral, uma definição de uma função sobre um conjunto definido indutivamente (no nosso caso, fórmulas) é recursiva se os casos na definição da função fazem uso da própria função. Para ser bem definida, devemos garantir, no entanto, que só usamos os valores da função para argumentos que vêm "antes" daquele que estamos definindo—no nosso caso, ao definir "subfórmula própria" para $(\psi * \chi)$ usamos apenas as subfórmulas próprias das fórmulas "anteriores" ψ e χ.

fol:syn:sbf: prop:subfrm-trans

Proposição 2.18. *Suponha que ψ é uma subfórmula de φ e χ é uma subfórmula de ψ. Então χ é uma subfórmula de φ. Em outras palavras, a relação de subfórmula é transitiva.*

Problema 2.5. Prove Proposição 2.18.

fol:syn:sbf: prop:count-subfrms

Proposição 2.19. *Suponha que φ é uma fórmula com n conectivos e quantificadores. Então φ tem no máximo $2n + 1$ subfórmulas.*

Problema 2.6. Prove Proposição 2.19.

2.7 Sequências de Formação

fol:syn:fseq: sec

Definir fórmulas via uma definição indutiva, e a técnica complementar de provar propriedades de fórmulas via indução, é uma abordagem elegante e eficiente. No entanto, também pode ser útil considerar uma abordagem mais ascendente, passo a passo, da construção de fórmulas, o que fazemos aqui usando a noção de uma *sequência de formação*. Para mostrar como termos e fórmulas podem ser introduzidos dessa maneira sem precisar referir-se a suas definições indutivas, primeiro introduzimos a noção de uma cadeia arbitrária de símbolos extraída de alguma linguagem $\mathcal{L}$.

fol:syn:fseq: defn:string

Definição 2.20 (Cadeias). Suponha que $\mathcal{L}$ é uma linguagem de primeira ordem. Uma *$\mathcal{L}$-cadeia* é uma sequência finita de símbolos de $\mathcal{L}$. Quando a linguagem $\mathcal{L}$ está claramente fixada pelo contexto, frequentemente nos referiremos a uma $\mathcal{L}$-cadeia simplesmente como uma *cadeia*.

Exemplo 2.21. Para qualquer linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$, todas as $\mathcal{L}$-fórmulas são $\mathcal{L}$-cadeias, mas não reciprocamente. Por exemplo,

$$)(v_0 \to \exists$$

é uma $\mathcal{L}$-cadeia mas não uma $\mathcal{L}$-fórmula.

fol:syn:fseq: defn:fseq-trm

Definição 2.22 (Sequências de formação para termos). Uma sequência finita de $\mathcal{L}$-cadeias $\langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ é uma *sequência de formação* para um termo t se $t \equiv t_n$ e para todo $i \leq n$, ou t_i é a variável ou a símbolo de constante, ou $\mathcal{L}$ contém um símbolo de função f k-ário e existem $m_0, \ldots, m_k < i$ tais que $t_i \equiv f(t_{m_0}, \ldots, t_{m_k})$. Quando for necessário distinguir, nos referiremos às sequências de formação para termos como *sequências de formação de termos*.

Exemplo 2.23. A sequência

$$\langle c_0, v_0, f_0^2(c_0, v_0), f_0^1(f_0^2(c_0, v_0))\rangle$$

é uma sequência de formação para o termo $f_0^1(f_0^2(c_0, v_0))$, assim como

$$\langle v_0, c_0, f_0^2(c_0, v_0), f_0^1(f_0^2(c_0, v_0))\rangle.$$

Definição 2.24 (Sequências de formação para fórmulas). Uma sequência finita de $\mathcal{L}$-cadeias $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n\rangle$ é uma *sequência de formação* para φ se $\varphi \equiv \varphi_n$ e para todo $i \leq n$, ou φ_i é uma fórmula atômica ou existem $j, k < i$ e a variável x tais que uma das seguintes condições vale: fol:syn:fseq:defn:fseq-frm

1. $\varphi_i \equiv \neg\varphi_j$.
2. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$.
3. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \vee \varphi_k)$.
4. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \to \varphi_k)$.
5. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \leftrightarrow \varphi_k)$.
6. $\varphi_i \equiv \forall x\, \varphi_j$.
7. $\varphi_i \equiv \exists x\, \varphi_j$.

Quando for necessário distinguir, nos referiremos às sequências de formação para fórmulas como *sequências de formação de fórmulas*.

Exemplo 2.25.

$$\langle A_0^1(v_0), A_1^1(c_1), (A_1^1(c_1) \wedge A_0^1(v_0)), \exists v_0\, (A_1^1(c_1) \wedge A_0^1(v_0))\rangle$$

é uma sequência de formação de $\exists v_0\, (A_1^1(c_1) \wedge A_0^1(v_0))$, assim como

$$\langle A_0^1(v_0), A_1^1(c_1), (A_1^1(c_1) \wedge A_0^1(v_0)), A_1^1(c_1), \forall v_1\, A_0^1(v_0), \exists v_0\, (A_1^1(c_1) \wedge A_0^1(v_0))\rangle.$$

Como pode ser visto no segundo exemplo, sequências de formação podem conter "lixo": fórmulas que são redundantes ou não contribuem para a construção.

Proposição 2.26. *Toda fórmula φ em $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ tem uma sequência de formação.* fol:syn:fseq:prop:formed

Prova. Suponha que φ é atômica. Então a sequência $\langle\varphi\rangle$ é uma sequência de formação para φ. Agora suponha que ψ e χ têm sequências de formação $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n\rangle$ e $\langle\chi_0, \ldots, \chi_m\rangle$ respectivamente.

1. Se $\varphi \equiv \neg\psi$, então $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \neg\psi_n\rangle$ é uma sequência de formação para φ.
2. Se $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, então $\langle\psi_0, \ldots, \psi_n, \chi_0, \ldots, \chi_m, (\psi_n \wedge \chi_m)\rangle$ é uma sequência de formação para φ.

3. Se $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$, então $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \chi_0, \dots, \chi_m, (\psi_n \vee \chi_m)\rangle$ é uma sequência de formação para φ.

4. Se $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$, então $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \chi_0, \dots, \chi_m, (\psi_n \to \chi_m)\rangle$ é uma sequência de formação para φ.

5. Se $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$, então $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \chi_0, \dots, \chi_m, (\psi_n \leftrightarrow \chi_m)\rangle$ é uma sequência de formação para φ.

6. Se $\varphi \equiv \forall x\, \psi$, então $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \forall x\, \psi_n\rangle$ é uma sequência de formação para φ.

7. Se $\varphi \equiv \exists x\, \psi$, então $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \exists x\, \psi_n\rangle$ é uma sequência de formação para φ.

Pelo princípio de indução sobre fórmulas, toda fórmula tem uma sequência de formação. □

Também podemos provar a recíproca. Isso é importante porque mostra que nossas duas maneiras de definir fórmulas são equivalentes: elas dão os mesmos resultados. Isso também significa que podemos provar teoremas sobre fórmulas usando indução ordinária sobre o comprimento das sequências de formação.

fol:syn:fseq: lem:fseq-init

Lema 2.27. *Suponha que $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n\rangle$ é uma sequência de formação para φ_n, e que $k \leq n$. Então $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_k\rangle$ é uma sequência de formação para φ_k.*

Prova. Exercício. □

Problema 2.7. Prove Lema 2.27.

fol:syn:fseq: thm:fseq-frm-equiv

Teorema 2.28. $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ *é o conjunto de todas as $\mathcal{L}$-cadeias φ tais que existe uma sequência de formação de fórmulas para φ.*

Prova. Seja F o conjunto de todas as cadeias de símbolos na linguagem $\mathcal{L}$ que têm uma sequência de formação. Vimos em Proposição 2.26 que $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}) \subseteq F$, então agora provamos a recíproca.

Suponha que φ tem uma sequência de formação $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n\rangle$. Provamos que $\varphi \in \mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ por indução forte sobre n. Nossa hipótese de indução é que toda cadeia de símbolos com uma sequência de formação de comprimento $m < n$ está em $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$. Pela definição de uma sequência de formação, ou $\varphi \equiv \varphi_n$ é atômica ou devem existir $j, k < n$ tais que um dos seguintes casos vale:

1. $\varphi \equiv \neg\varphi_j$.

2. $\varphi \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$.

3. $\varphi \equiv (\varphi_j \vee \varphi_k)$.

4. $\varphi \equiv (\varphi_j \to \varphi_k)$.

5. $\varphi \equiv (\varphi_j \leftrightarrow \varphi_k)$.
6. $\varphi \equiv \forall x\, \varphi_j$.
7. $\varphi \equiv \exists x\, \varphi_j$.

Agora raciocinamos por casos. Se φ é atômica então $\varphi_n \in \mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$. Suponha, em vez disso, que $\varphi \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$. Por Lema 2.27, $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_j \rangle$ e $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_k \rangle$ são sequências de formação para φ_j e φ_k, respectivamente. Como estas são subsequências iniciais próprias da sequência de formação para φ, ambas têm comprimento menor que n. Portanto, pela hipótese de indução, φ_j e φ_k estão em $\mathrm{Frm}(\mathcal{L}_0)$, e pela definição de a fórmula, $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ também está. Os outros casos seguem por raciocínio análogo. □

Sequências de formação para termos têm propriedades semelhantes às das fórmulas.

Proposição 2.29. $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})$ *é o conjunto de todas as* $\mathcal{L}$*-cadeias* t *tais que existe uma sequência de formação de termos para* t*.* *fol:syn:fseq: prop:fseq-trm-equiv*

Prova. Exercício. □

Problema 2.8. Prove Proposição 2.29. Dica: use uma estratégia semelhante à usada na prova de Teorema 2.28.

Há dois tipos de "lixo" que podem aparecer em sequências de formação: elementos repetidos, e elementos que são irrelevantes para a construção da fórmula ou termo. Podemos eliminar ambos olhando para sequências de formação mínimas.

Definição 2.30 (Sequências de formação mínimas). Uma sequência de formação $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle$ para uma fórmula φ é uma *sequência de formação mínima* para φ se, para toda outra sequência de formação s para φ, o comprimento de s é maior ou igual a $n + 1$. *fol:syn:fseq: defn:minimal-fseq*

Similarmente, uma sequência de formação $\langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ para um termo t é uma *sequência de formação mínima* para t se, para toda outra sequência de formação s para t, o comprimento de s é maior ou igual a $n + 1$.

Note que uma fórmula ou termo pode ter mais de uma sequência de formação mínima, mas elas conterão exatamente as mesmas cadeias.

Proposição 2.31. *As seguintes condições são equivalentes:* *fol:syn:fseq: prop:subformula-equivs*

1. ψ *é uma sub-fórmula de* φ*.*
2. ψ *ocorre em toda sequência de formação de* φ*.*
3. ψ *ocorre em uma sequência de formação mínima de* φ*.*

Prova. Exercício. □

Problema 2.9. Prove Proposição 2.31.

Observações históricas Sequências de formação foram introduzidas por Raymond Smullyan em seu livro-texto *First-Order Logic* (Smullyan, 1968). Propriedades adicionais de sequências de formação foram estabelecidas por Zuckerman (1973).

2.8 Variáveis Livres e Sentenças

fol:syn:fvs:sec
fol:syn:fvs:defn:free-occ

Definição 2.32 (Ocorrências livres de a variável). As ocorrências *livres* de a variável em a fórmula são definidas indutivamente como segue:

1. φ is atomic: todas as ocorrências de variável em φ são livres.
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: as ocorrências livres de variável de φ são exatamente as de ψ.
3. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: as ocorrências livres de variável de φ são as em ψ juntamente com as em χ.
4. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: as ocorrências livres de variável em φ são todas as em ψ exceto as ocorrências de x.
5. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: as ocorrências livres de variável em φ são todas as em ψ exceto as ocorrências de x.

Definição 2.33 (Variáveis Ligadas). Uma ocorrência de a variável em uma fórmula φ é *ligada* se não é livre.

Problema 2.10. Dê uma definição indutiva das ocorrências de variáveis ligadas nos moldes de Definição 2.32.

Definição 2.34 (Escopo). Se $\forall x\, \psi$ é uma ocorrência de uma subfórmula em uma fórmula φ, então a ocorrência correspondente de ψ em φ é chamada de *escopo* da ocorrência correspondente de $\forall x$. Analogamente para $\exists x$.

Se ψ é o escopo de uma ocorrência de quantificador $\forall x$ ou $\exists x$ em φ, então as ocorrências livres de x em ψ são ligadas em $\forall x\, \psi$ e $\exists x\, \psi$. Dizemos que essas ocorrências são *ligadas pela* ocorrência de quantificador mencionada.

Exemplo 2.35. Considere a seguinte fórmula:

$$\exists v_0\, \underbrace{A^2_0(v_0, v_1)}_{\psi}$$

ψ representa o escopo de $\exists v_0$. O quantificador liga a ocorrência de v_0 em ψ, mas não liga a ocorrência de v_1. Então v_1 é uma variável livre neste caso.

Agora podemos ver como isso poderia funcionar em uma fórmula φ mais complicada:

$$\forall v_0\, \underbrace{(A^1_0(v_0) \to A^2_0(v_0, v_1))}_{\psi} \to \exists v_1\, \underbrace{(A^2_1(v_0, v_1) \vee \forall v_0\, \overbrace{\neg A^1_1(v_0)}^{\theta})}_{\chi}$$

ψ é o escopo do primeiro $\forall v_0$, χ é o escopo de $\exists v_1$, e θ é o escopo do segundo $\forall v_0$. O primeiro $\forall v_0$ liga as ocorrências de v_0 em ψ, $\exists v_1$ liga a ocorrência de v_1 em χ, e o segundo $\forall v_0$ liga a ocorrência de v_0 em θ. A primeira ocorrência de v_1 e a quarta ocorrência de v_0 são livres em φ. A última ocorrência de v_0 é livre em θ, mas ligada em χ e φ.

Definição 2.36 (Sentença). A fórmula φ é a *sentença* sse não contém ocorrências livres de variáveis.

2.9 Substituição

fol:syn:sub:sec

Definição 2.37 (Substituição em um termo). Definimos $s[t/x]$, o resultado de *substituir* t por toda ocorrência de x em s, recursivamente:

1. $s \equiv c$: $s[t/x]$ é simplesmente s.
2. $s \equiv y$: $s[t/x]$ é também simplesmente s, desde que y seja uma variável e $y \not\equiv x$.
3. $s \equiv x$: $s[t/x]$ é t.
4. $s \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$: $s[t/x]$ é $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$.

Definição 2.38. Um termo t está *livre para* x em φ se nenhuma das ocorrências livres de x em φ ocorre no escopo de um quantificador que liga uma variável em t.

Exemplo 2.39.

1. v_8 está livre para v_1 em $\exists v_3 A^2_4(v_3, v_1)$
2. $f^2_1(v_1, v_2)$ *não* está livre para v_0 em $\forall v_2 A^2_4(v_0, v_2)$

Definição 2.40 (Substituição em a fórmula). Se φ é a fórmula, x é a variável, e t é um termo livre para x em φ, então $\varphi[t/x]$ é o resultado de substituir t por todas as ocorrências livres de x em φ.

1. $\varphi \equiv \bot$: $\varphi[t/x]$ é $\bot$.
2. $\varphi \equiv \top$: $\varphi[t/x]$ é $\top$.
3. $\varphi \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$: $\varphi[t/x]$ é $P(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$.
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $\varphi[t/x]$ é $t_1[t/x] = t_2[t/x]$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\varphi[t/x]$ é $\neg\psi[t/x]$.
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\varphi[t/x]$ é $(\psi[t/x] \wedge \chi[t/x])$.
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\varphi[t/x]$ é $(\psi[t/x] \vee \chi[t/x])$.

8. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\varphi[t/x]$ é $(\psi[t/x] \to \chi[t/x])$.

9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\varphi[t/x]$ é $(\psi[t/x] \leftrightarrow \chi[t/x])$.

10. $\varphi \equiv \forall y\, \psi$: $\varphi[t/x]$ é $\forall y\, \psi[t/x]$, desde que y seja uma variável diferente de x; caso contrário $\varphi[t/x]$ é simplesmente φ.

11. $\varphi \equiv \exists y\, \psi$: $\varphi[t/x]$ é $\exists y\, \psi[t/x]$, desde que y seja uma variável diferente de x; caso contrário $\varphi[t/x]$ é simplesmente φ.

Note que a substituição pode ser vácua: Se x não ocorre de modo algum em φ, então $\varphi[t/x]$ é simplesmente φ. explanation

A restrição de que t deve estar livre para x em φ é necessária para excluir casos como o seguinte. Se $\varphi \equiv \exists y\, x < y$ e $t \equiv y$, então $\varphi[t/x]$ seria $\exists y\, y < y$. Neste caso a variável livre y é "capturada" pelo quantificador $\exists y$ ao substituir, e isso é indesejável. Por exemplo, gostaríamos que fosse o caso que, sempre que $\forall x\, \psi$ vale, $\psi[t/x]$ também vale. Mas considere $\forall x\, \exists y\, x < y$ (aqui ψ é $\exists y\, x < y$). É uma sentença que é verdadeira a respeito, por exemplo, dos números naturais: para todo número x há um número y maior que ele. Se permitíssemos y como uma possível substituição para x, terminaríamos com $\psi[y/x] \equiv \exists y\, y < y$, que é falsa. Prevenimos isso exigindo que nenhuma das variáveis livres em t acabe sendo ligada por um quantificador em φ.

Frequentemente usamos a seguinte convenção para evitar notação incômoda: Se φ é a fórmula que pode conter a variável x livre, também escrevemos $\varphi(x)$ para indicar isso. Quando está claro qual φ e x temos em mente, e t é um termo (suposto estar livre para x em $\varphi(x)$), então escrevemos $\varphi(t)$ como abreviação de $\varphi[t/x]$. Assim, por exemplo, poderíamos dizer, "chamamos $\varphi(t)$ de uma instância de $\forall x\, \varphi(x)$." Com isso queremos dizer que se φ é qualquer fórmula, x a variável, e t um termo que está livre para x em φ, então $\varphi[t/x]$ é uma instância de $\forall x\, \varphi$.

Capítulo 3

Semântica da Lógica de Primeira Ordem

3.1 Introdução

fol:syn:its:sec

Dar o significado das expressões é o domínio da semântica. O conceito central em semântica é o de satisfação em a estrutura. A estrutura dá significado aos blocos de construção da linguagem: a domínio é um conjunto não vazio de objetos. Os quantificadores são interpretados como variando sobre esse domínio, aos símbolos de constante são atribuídos elementos no domínio, aos símbolos de função são atribuídas funções do domínio para si mesmo, e aos símbolos de predicado são atribuídas relações sobre o domínio. O domínio junto com as atribuições ao vocabulário básico constitui a estrutura. Variáveis podem aparecer em fórmulas, e para dar uma semântica, também temos que atribuir membros do domínio a elas—isto é uma atribuição de variáveis. A relação de satisfação, finalmente, reúne tudo isso. A fórmula pode ser satisfeita em a estrutura $\mathfrak{M}$ relativamente a uma atribuição de variáveis s, escrita como $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$. Essa relação também é definida por indução sobre a estrutura de φ, usando as tabelas de verdade para os conectivos lógicos para definir, por exemplo, a satisfação de $(\varphi \wedge \psi)$ em termos da satisfação (ou não) de φ e ψ. Acontece então que a atribuição de variáveis é irrelevante se a fórmula φ é a sentença, isto é, não tem variáveis livres, e assim podemos falar de sentenças sendo simplesmente satisfeitas (ou não) em estruturas.

Com base na relação de satisfação $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para sentenças podemos então definir as noções semânticas básicas de validade, consequência e satisfatibilidade. A sentença é válida, $\vDash \varphi$, se toda estrutura a satisfaz. Ela é consequência de um conjunto de sentenças, $\Gamma \vDash \varphi$, se toda estrutura que satisfaz todas as sentenças em Γ também satisfaz φ. E um conjunto de sentenças é satisfatível se alguma estrutura satisfaz todas as sentenças nele ao mesmo tempo. Como fórmulas são definidas indutivamente, e a satisfação é por sua vez definida por indução sobre a estrutura das fórmulas, podemos usar indução para provar propriedades de nossa semântica e para relacionar as noções semânticas definidas.

3.2 Estruturas para Linguagens de Primeira Ordem

fol:syn:str:sec

As linguagens de primeira ordem são, por si mesmas, *não interpretadas:* os símbolos de constante, símbolos de função e símbolos de predicado não têm nenhum significado específico associado a eles. Os significados são dados especificando-se a *estrutura*. Ela especifica o *domínio*, isto é, os objetos que os símbolos de constante denotam, sobre os quais os símbolos de função operam e sobre os quais os quantificadores variam. Além disso, ela especifica quais símbolos de constante denotam quais objetos, como a símbolo de função mapeia objetos para objetos, e a quais objetos os símbolos de predicado se aplicam. Estruturas são a base para as noções *semânticas* em lógica, por exemplo, a noção de consequência, validade, satisfatibilidade. Elas são chamadas de várias formas na literatura: "estruturas", "interpretações" ou "modelos". explanation

Definição 3.1 (Estruturas). A *estrutura* $\mathfrak{M}$, para uma linguagem $\mathcal{L}$ de lógica de primeira ordem consiste nos seguintes elementos:

1. *Domínio:* um conjunto não vazio, $|\mathfrak{M}|$
2. *Interpretação dos símbolos de constante:* para cada símbolo de constante c de $\mathcal{L}$, um membro $c^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$
3. *Interpretação dos símbolos de predicado:* para cada símbolo de predicado R de n lugares de $\mathcal{L}$ (distinto de $=$), uma relação de n lugares $R^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^n$
4. *Interpretação dos símbolos de função:* para cada símbolo de função f de n lugares de $\mathcal{L}$, uma função de n lugares $f^{\mathfrak{M}} \colon |\mathfrak{M}|^n \to |\mathfrak{M}|$

Exemplo 3.2. A estrutura $\mathfrak{M}$ para a linguagem da aritmética consiste em um conjunto, um elemento de $|\mathfrak{M}|$, $\mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$, como interpretação do símbolo de constante o, uma função de um lugar $\mathsf{'}^{\mathfrak{M}} \colon |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}|$, duas funções de dois lugares $+^{\mathfrak{M}}$ e $\times^{\mathfrak{M}}$, ambas $|\mathfrak{M}|^2 \to |\mathfrak{M}|$, e uma relação de dois lugares $<^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^2$.

Um exemplo óbvio de tal estrutura é o seguinte:

1. $|\mathfrak{N}| = \mathbb{N}$
2. $\mathsf{o}^{\mathfrak{N}} = 0$
3. $\mathsf{'}^{\mathfrak{N}}(n) = n + 1$ para todos $n \in \mathbb{N}$
4. $+^{\mathfrak{N}}(n, m) = n + m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$
5. $\times^{\mathfrak{N}}(n, m) = n \cdot m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$
6. $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle n, m\rangle : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n < m\}$

A estrutura $\mathfrak{N}$ para $\mathcal{L}_A$ assim definida é chamada de *modelo padrão da aritmética*, porque interpreta as constantes não lógicas de $\mathcal{L}_A$ exatamente como se esperaria.

No entanto, há muitas outras estruturas possíveis para $\mathcal{L}_A$. Por exemplo, poderíamos tomar como domínio o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros em vez de $\mathbb{N}$, e definir as interpretações de 0, $'$, $+$, $\times$, $<$ adequadamente. Mas também podemos definir estruturas para $\mathcal{L}_A$ que não têm nada, nem mesmo remotamente, a ver com números.

Exemplo 3.3. Uma estrutura $\mathfrak{M}$ para a linguagem $\mathcal{L}_Z$ da teoria dos conjuntos requer apenas um conjunto e uma única relação de dois lugares. Então, tecnicamente, por exemplo, o conjunto das pessoas mais a relação "x é mais velho que y" poderia ser usado como a estrutura para $\mathcal{L}_Z$, assim como $\mathbb{N}$ junto com $n \geq m$ para $n, m \in \mathbb{N}$.

Uma estrutura particularmente interessante para $\mathcal{L}_Z$ na qual os membros do domínio são de fato conjuntos, e a interpretação de $\in$ é de fato a relação "x é um membro de y" é a estrutura $\mathfrak{HF}$ dos *conjuntos hereditariamente finitos*:

1. $|\mathfrak{HF}| = \emptyset \cup \wp(\emptyset) \cup \wp(\wp(\emptyset)) \cup \wp(\wp(\wp(\emptyset))) \cup \ldots$;
2. $\in^{\mathfrak{HF}} = \{\langle x, y\rangle : x, y \in |\mathfrak{HF}|, x \in y\}$.

digression As estipulações que fazemos sobre o que conta como a estrutura impactam nossa lógica. Por exemplo, a escolha de impedir domínios vazios garante, dada a explicação usual de satisfação (ou verdade) para sentenças quantificadas, que $\exists x\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ é válida—isto é, uma verdade lógica. E a estipulação de que todos os símbolos de constante devem referir-se a um objeto no domínio garante que a generalização existencial é um padrão de inferência correto: $\varphi(a)$, portanto $\exists x\,\varphi(x)$. Se permitíssemos que nomes se referissem a algo fora do domínio, ou que não se referissem, então estaríamos a caminho de uma *lógica livre*, na qual a generalização existencial requer uma premissa adicional: $\varphi(a)$ e $\exists x\, x = a$, portanto $\exists x\,\varphi(x)$.

3.3 Estruturas Cobertas para Linguagens de Primeira Ordem

explanation Lembre-se de que um termo é *fechado* se não contém variáveis. fol:syn:covsec

Definição 3.4 (Valor de termos fechados). Se t é um termo fechado da linguagem $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{M}$ é a estrutura para $\mathcal{L}$, o *valor* $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ é definido como segue:

1. Se t é apenas o símbolo de constante c, então $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}}$.
2. Se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, então

$$\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_n)).$$

Definição 3.5 (Estrutura Coberta). A estrutura é *coberta* se todo elemento do domínio é o valor de algum termo fechado.

Exemplo 3.6. Seja $\mathcal{L}$ a linguagem com os símbolos de constante zero, um, dois, ..., o símbolo de predicado binário $<$, e os símbolos de função binários $+$ e $\times$. Então a estrutura $\mathfrak{M}$ para $\mathcal{L}$ é aquela com domínio $|\mathfrak{M}| = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e atribuições $\mathit{zero}^{\mathfrak{M}} = 0$, $\mathit{um}^{\mathfrak{M}} = 1$, $\mathit{dois}^{\mathfrak{M}} = 2$, e assim por diante. Para o símbolo de relação binário $<$, o conjunto $<^{\mathfrak{M}}$ é o conjunto de todos os pares $\langle c_1, c_2\rangle \in |\mathfrak{M}|^2$ tais que c_1 é menor que c_2: por exemplo, $\langle 1, 3\rangle \in <^{\mathfrak{M}}$ mas $\langle 2, 2\rangle \notin <^{\mathfrak{M}}$. Para o símbolo de função binário $+$, defina $+^{\mathfrak{M}}$ da maneira usual—por exemplo, $+^{\mathfrak{M}}(2, 3)$ resulta em 5, e analogamente para o símbolo de função binário $\times$. Portanto, o valor de quatro é apenas 4, e o valor de $\times(\mathit{dois}, +(\mathit{tres}, \mathit{zero}))$ (ou em notação infixa, $\mathit{dois} \times (\mathit{tres} + \mathit{zero})$) é

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\times(\mathit{dois}, +(\mathit{tres}, \mathit{zero}))) &= \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\mathit{dois}), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(+(\mathit{tres}, \mathit{zero}))) \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\mathit{dois}), +^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\mathit{tres}), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(\mathit{zero}))) \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(\mathit{dois}^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}(\mathit{tres}^{\mathfrak{M}}, \mathit{zero}^{\mathfrak{M}})) \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(2, +^{\mathfrak{M}}(3, 0)) \\
&= \times^{\mathfrak{M}}(2, 3) \\
&= 6
\end{aligned}$$

Problema 3.1. $\mathfrak{N}$, o modelo padrão da aritmética, é coberto? Explique.

3.4 Satisfação de a Fórmula em a Estrutura

fol:syn:sat:sec

A noção básica que relaciona expressões como termos e fórmulas, por um lado, e estruturas, por outro, são as de *valor* de um termo e *satisfação* de a fórmula. Informalmente, o valor de um termo é um membro de a estrutura—se o termo é apenas uma constante, seu valor é o objeto atribuído à constante pela estrutura, e se ele é construído usando símbolos de função, o valor é calculado a partir dos valores das constantes e das funções atribuídas às funções no termo. A fórmula é *satisfeita* em a estrutura se a interpretação dada aos predicados torna a fórmula verdadeira no domínio da estrutura. Essa noção de satisfação é especificada indutivamente: a especificação da estrutura afirma diretamente quando fórmulas atômicas são satisfeitas, e definimos quando uma fórmula complexa é satisfeita dependendo do conectivo principal ou quantificador e de se as subfórmulas imediatas são ou não satisfeitas. explanation

O caso dos quantificadores aqui é um pouco delicado, pois a subfórmula imediata de uma fórmula quantificada tem uma variável livre, e estruturas não especificam os valores das variáveis. Para lidar com essa dificuldade, também introduzimos *atribuições de variáveis* e definimos a satisfação não em relação a a estrutura sozinha, mas em relação a a estrutura mais uma atribuição de variáveis.

Definição 3.7 (Atribuição de Variáveis). Uma *atribuição de variáveis* s para a estrutura $\mathfrak{M}$ é uma função que mapeia cada variável para um membro de $|\mathfrak{M}|$, isto é, $s\colon \mathrm{Var} \to |\mathfrak{M}|$.

explanation

A estrutura atribui a valor a cada símbolo de constante, e uma atribuição de variáveis a cada variável. Mas queremos usar termos construídos a partir deles para também nomear membros do domínio. Para isso, definimos o valor dos termos indutivamente. Para símbolos de constante e variáveis, o valor é exatamente como a estrutura ou a atribuição de variáveis o especifica; para termos mais complexos, ele é calculado recursivamente usando as funções que a estrutura atribui aos símbolos de função.

Definição 3.8 (Valor de Termos). Se t é um termo da linguagem $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$ é a estrutura para $\mathcal{L}$, e s é uma atribuição de variáveis para $\mathfrak{M}$, o *valor* $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t)$ é definido como segue:

1. $t \equiv c$: $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t) = c^{\mathfrak{M}}$.
2. $t \equiv x$: $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t) = s(x)$.
3. $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t_n)).$$

Definição 3.9 (x-Variante). Se s é uma atribuição de variáveis para a estrutura $\mathfrak{M}$, então qualquer atribuição de variáveis s' para $\mathfrak{M}$ que difere de s no máximo no que atribui a x é chamada de *x-variante* de s. Se s' é uma x-variante de s escrevemos $s' \sim_x s$.

explanation

Note que uma x-variante de uma atribuição s não *precisa* atribuir algo diferente a x. De fato, toda atribuição conta como uma x-variante de si mesma.

Definição 3.10. Se s é uma atribuição de variáveis para a estrutura $\mathfrak{M}$ e $m \in |\mathfrak{M}|$, então a atribuição $s[m/x]$ é a atribuição de variáveis definida por

$$s[m/x](y) = \begin{cases} m & \text{se } y \equiv x \\ s(y) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras, $s[m/x]$ é a x-variante particular de s que atribui o membro m do domínio a x, e atribui as mesmas coisas às variáveis diferentes de x que s atribui.

Definição 3.11 (Satisfação). A satisfação de a fórmula φ em a estrutura $\mathfrak{M}$ relativamente a uma atribuição de variáveis s, em símbolos: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$, é definida recursivamente como segue. (Escrevemos $\mathfrak{M}, s \nvDash \varphi$ para significar "não $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$".)

fol:syn:sat: defn:satisfaction

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, s \nvDash \varphi$.

2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t_n)\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$.
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t_2)$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \nvDash \psi$.
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ e $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$.
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ ou $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$ (ou ambos).
8. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \nvDash \psi$ ou $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$ (ou ambos).
9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse ou ambos $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ e $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$, ou nem $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ nem $\mathfrak{M}, s \vDash \chi$.
10. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse para todo membro $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \psi$.
11. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse para pelo menos um membro $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \psi$.

explanation

As atribuições de variáveis são importantes nas últimas duas cláusulas. Não podemos definir a satisfação de $\forall x\, \psi(x)$ por "para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M} \vDash \psi(m)$". Não podemos definir a satisfação de $\exists x\, \psi(x)$ por "para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M} \vDash \psi(m)$". A razão é que, se $m \in |\mathfrak{M}|$, ele não é um símbolo da linguagem, e portanto $\psi(m)$ não é a fórmula (isto é, $\psi[m/x]$ é indefinido). Também não podemos supor que temos símbolos de constante ou termos disponíveis que nomeiem cada membro de $\mathfrak{M}$, já que não há nada na definição de estruturas que o exija. Na linguagem padrão, o conjunto de símbolos de constante é infinito enumerável, então se $|\mathfrak{M}|$ não é enumerável não há sequer símbolos de constante suficientes para nomear cada objeto.

Resolvemos esse problema introduzindo atribuições de variáveis, que nos permitem ligar variáveis diretamente a membros do domínio. Então, em vez de dizer que, por exemplo, $\exists x\, \psi(x)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ sse para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$, dizemos que ela é satisfeita em $\mathfrak{M}$ *relativamente a* s sse $\psi(x)$ é satisfeita relativamente a $s[m/x]$ para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$.

Exemplo 3.12. Seja $\mathcal{L} = \{a, b, f, R\}$ onde a e b são símbolos de constante, f é um símbolo de função de dois lugares, e R é um símbolo de predicado de dois lugares. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$ definida por:

1. $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $a^{\mathfrak{M}} = 1$
3. $b^{\mathfrak{M}} = 2$
4. $f^{\mathfrak{M}}(x, y) = x + y$ se $x + y \leq 3$ e $= 3$ caso contrário.
5. $R^{\mathfrak{M}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$

A função $s(x) = 1$ que atribui $1 \in |\mathfrak{M}|$ a cada variável é uma atribuição de variáveis para $\mathfrak{M}$.

Então

$$\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(f(a,b)) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(a), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(b)).$$

Como a e b são símbolos de constante, $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(a) = a^{\mathfrak{M}} = 1$ e $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(b) = b^{\mathfrak{M}} = 2$. Então

$$\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(f(a,b)) = f^{\mathfrak{M}}(1,2) = 1 + 2 = 3.$$

Para calcular o valor de $f(f(a,b),a)$ temos que considerar

$$\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(f(f(a,b),a)) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(f(a,b)), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(a)) = f^{\mathfrak{M}}(3,1) = 3,$$

já que $3 + 1 > 3$. Como $s(x) = 1$ e $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(x) = s(x)$, também temos

$$\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(f(f(a,b),x)) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(f(a,b)), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(x)) = f^{\mathfrak{M}}(3,1) = 3,$$

Uma fórmula atômica $R(t_1, t_2)$ é satisfeita se a tupla de valores de seus argumentos, isto é, $\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t_1), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t_2)\rangle$, é um membro de $R^{\mathfrak{M}}$. Assim, por exemplo, temos $\mathfrak{M}, s \vDash R(b, f(a,b))$ já que $\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(b), \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(f(a,b))\rangle = \langle 2,3\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, mas $\mathfrak{M}, s \nvDash R(x, f(a,b))$ já que $\langle 1,3\rangle \notin R^{\mathfrak{M}}[s]$.

Para determinar se uma fórmula não atômica φ é satisfeita, aplicam-se as cláusulas da definição indutiva que se aplicam ao conectivo principal. Por exemplo, o conectivo principal em $R(a,a) \to (R(b,x) \vee R(x,b))$ é o $\to$, e

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}, s \vDash R(a,a) \to (R(b,x) \vee R(x,b)) \text{ sse}\\ &\quad \mathfrak{M}, s \nvDash R(a,a) \text{ ou } \mathfrak{M}, s \vDash R(b,x) \vee R(x,b)\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{M}, s \vDash R(a,a)$ (porque $\langle 1,1\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$) ainda não podemos determinar a resposta e devemos primeiro descobrir se $\mathfrak{M}, s \vDash R(b,x) \vee R(x,b)$:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}, s \vDash R(b,x) \vee R(x,b) \text{ sse}\\ &\quad \mathfrak{M}, s \vDash R(b,x) \text{ ou } \mathfrak{M}, s \vDash R(x,b)\end{aligned}$$

E este é o caso, já que $\mathfrak{M}, s \vDash R(x,b)$ (porque $\langle 1,2\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$).

Lembre-se de que uma x-variante de s é uma atribuição de variáveis que difere de s no máximo no que atribui a x. Para cada membro de $|\mathfrak{M}|$, há uma x-variante de s:

$$\begin{aligned}s_1 &= s[1/x], & s_2 &= s[2/x],\\ s_3 &= s[3/x], & s_4 &= s[4/x].\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $s_2(x) = 2$ e $s_2(y) = s(y) = 1$ para todas as variáveis y diferentes de x. Estas são todas as x-variantes de s para a estrutura $\mathfrak{M}$, já que $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3, 4\}$. Note, em particular, que $s_1 = s$ (s é sempre uma x-variante de si mesma).

Para determinar se uma fórmula quantificada existencialmente $\exists x\, \varphi(x)$ é satisfeita, temos que determinar se $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi(x)$ para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$. Assim,

$$\mathfrak{M}, s \vDash \exists x\, (R(b, x) \vee R(x, b)),$$

já que $\mathfrak{M}, s[1/x] \vDash R(b, x) \vee R(x, b)$ ($s[3/x]$ também serviria). Mas,

$$\mathfrak{M}, s \nvDash \exists x\, (R(b, x) \wedge R(x, b))$$

já que, qualquer que seja o $m \in |\mathfrak{M}|$ que escolhamos, $\mathfrak{M}, s[m/x] \nvDash R(b, x) \wedge R(x, b)$.

Para determinar se uma fórmula quantificada universalmente $\forall x\, \varphi(x)$ é satisfeita, temos que determinar se $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi(x)$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$. Assim,

$$\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\, (R(x, a) \to R(a, x)),$$

já que $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash R(x, a) \to R(a, x)$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$. Para $m = 1$, temos $\mathfrak{M}, s[1/x] \vDash R(a, x)$ então o consequente é verdadeiro; para $m = 2$, 3, e 4, temos $\mathfrak{M}, s[m/x] \nvDash R(x, a)$, então o antecedente é falso. Mas,

$$\mathfrak{M}, s \nvDash \forall x\, (R(a, x) \to R(x, a))$$

já que $\mathfrak{M}, s[2/x] \nvDash R(a, x) \to R(x, a)$ (porque $\mathfrak{M}, s[2/x] \vDash R(a, x)$ e $\mathfrak{M}, s[2/x] \nvDash R(x, a)$).

Para um caso mais complicado, considere

$$\forall x\, (R(a, x) \to \exists y\, R(x, y)).$$

Como $\mathfrak{M}, s[3/x] \nvDash R(a, x)$ e $\mathfrak{M}, s[4/x] \nvDash R(a, x)$, os casos interessantes em que temos que nos preocupar com o consequente do condicional são apenas $m = 1$ e $= 2$. $\mathfrak{M}, s[1/x] \vDash \exists y\, R(x, y)$ vale? Vale se há pelo menos um $n \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s[1/x][n/y] \vDash R(x, y)$. De fato, se tomarmos $n = 1$, temos $s[1/x][n/y] = s[1/y] = s$. Como $s(x) = 1$, $s(y) = 1$, e $\langle 1, 1\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, a resposta é sim.

Para determinar se $\mathfrak{M}, s[2/x] \vDash \exists y\, R(x, y)$, temos que olhar para as atribuições de variáveis $s[2/x][n/y]$. Aqui, para $n = 1$, essa atribuição é $s_2 = s[2/x]$, que não satisfaz $R(x, y)$ ($s_2(x) = 2$, $s_2(y) = 1$, e $\langle 2, 1\rangle \notin R^{\mathfrak{M}}$). No entanto, considere $s[2/x][3/y] = s_2[3/y]$. $\mathfrak{M}, s_2[3/y] \vDash R(x, y)$ já que $\langle 2, 3\rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, e assim $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \exists y\, R(x, y)$.

Assim, para todo $n \in |\mathfrak{M}|$, ou $\mathfrak{M}, s[m/x] \nvDash R(a, x)$ (se $m = 3$, 4) ou $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \exists y\, R(x, y)$ (se $m = 1$, 2), e assim

$$\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\, (R(a, x) \to \exists y\, R(x, y)).$$

Por outro lado,

$$\mathfrak{M}, s \nvDash \exists x\, (R(a, x) \wedge \forall y\, R(x, y)).$$

Temos $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash R(a, x)$ apenas para $m = 1$ e $m = 2$. Mas para ambos esses valores de m, há por sua vez um $n \in |\mathfrak{M}|$, a saber $n = 4$, tal que $\mathfrak{M}, s[m/x][n/y] \nvDash R(x, y)$ e assim $\mathfrak{M}, s[m/x] \nvDash \forall y\, R(x, y)$ para $m = 1$ e $m = 2$. Em suma, não há $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash R(a, x) \wedge \forall y\, R(x, y)$.

Problema 3.2. Seja $\mathcal{L} = \{c, f, A\}$ com um símbolo de constante, um símbolo de função de um lugar e um símbolo de predicado de dois lugares, e seja a estrutura $\mathfrak{M}$ dada por

1. $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3\}$
2. $c^{\mathfrak{M}} = 3$
3. $f^{\mathfrak{M}}(1) = 2, f^{\mathfrak{M}}(2) = 3, f^{\mathfrak{M}}(3) = 2$
4. $A^{\mathfrak{M}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

(a) Seja $s(v) = 1$ para todas as variáveis v. Descubra se

$$\mathfrak{M}, s \vDash \exists x\, (A(f(z), c) \to \forall y\, (A(y, x) \vee A(f(y), x)))$$

Explique por que sim ou por que não.

(b) Dê uma estrutura e uma atribuição de variáveis diferentes nas quais a fórmula não seja satisfeita.

3.5 Atribuições de Variáveis

explanation

Uma atribuição de variáveis s fornece um valor para *toda* variável—e há infinitas delas. Isso, é claro, não é necessário. Exigimos que as atribuições de variáveis atribuam valores a todas as variáveis simplesmente porque isso torna as coisas muito mais fáceis. O valor de um termo t, e se a fórmula φ é satisfeita em a estrutura com respeito a s, dependem apenas das atribuições que s faz às variáveis em t e às variáveis livres de φ. Esse é o conteúdo das próximas duas proposições. Para tornar precisa a ideia de "depende de", mostramos que quaisquer duas atribuições de variáveis que concordam em todas as variáveis em t dão o mesmo valor, e que φ é satisfeita relativamente a uma sse é satisfeita relativamente à outra se duas atribuições de variáveis concordam em todas as variáveis livres de φ.

fol:syn:ass:sec

Proposição 3.13. *Se as variáveis em um termo t estão entre $x_1, \ldots, x_n$, e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, então $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t)$.*

fol:syn:ass:prop:valindep

Prova. Por indução sobre a complexidade de t. Para o caso base, t pode ser a símbolo de constante ou uma das variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Se $t = c$, então $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) = c^{\mathfrak{M}} = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t)$. Se $t = x_i$, $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ pela hipótese da proposição, e assim $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) = s_1(x_i) = s_2(x_i) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t)$.

Para o passo indutivo, suponha que $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ e que a afirmação vale para $t_1, \ldots, t_k$. Então

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(f(t_1, \ldots, t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_k)).\end{aligned}$$

Para $j = 1, \ldots, k$, as variáveis de t_j estão entre $x_1, \ldots, x_n$. Pela hipótese de indução, $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_j) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_j)$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t) &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(f(t_1, \ldots, t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_k)) \\ &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(f(t_1, \ldots, t_k)) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t).\end{aligned}$$

□

fol:syn:ass: prop:satindep

Proposição 3.14. *Se as variáveis livres em φ estão entre $x_1, \ldots, x_n$, e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, então $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.*

Prova. Usamos indução sobre a complexidade de φ. Para o caso base, onde φ é atômica, φ pode ser: $\top$, $\bot$, $R(t_1, \ldots, t_k)$ para um predicado R de k lugares e termos $t_1, \ldots, t_k$, ou $t_1 = t_2$ para termos t_1 e t_2. Nos dois últimos casos, demonstramos apenas a direção direta do bicondicional, já que a prova da recíproca é simétrica.

1. $\varphi \equiv \top$: tanto $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$ quanto $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

2. $\varphi \equiv \bot$: tanto $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \varphi$ quanto $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \varphi$.

3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_k)$: seja $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$. Então

   $$\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_k) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}.$$

   Para $i = 1, \ldots, k$, $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_i) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_i)$ por Proposição 3.13. Então também temos $\langle \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_i), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_k) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, e portanto $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: suponha $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$. Então $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_2)$. Assim,

   $$\begin{aligned}\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_1) &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_1) && \text{(por Proposição 3.13)} \\ &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_1}(t_2) && \text{(já que } \mathfrak{M}, s_1 \vDash t_1 = t_2\text{)} \\ &= \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s_2}(t_2) && \text{(por Proposição 3.13),}\end{aligned}$$

   então $\mathfrak{M}, s_2 \vDash t_1 = t_2$.

Agora suponha $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \psi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \psi$ para todas as fórmulas ψ menos complexas que φ. O passo de indução procede por casos determinados pelo operador principal de φ. Em cada caso, demonstramos apenas a direção direta do bicondicional; a prova da direção reversa é simétrica. Em todos os casos exceto os dos quantificadores, aplicamos a hipótese de indução às sub-fórmulas ψ de φ. As variáveis livres de ψ estão entre as de φ. Assim, se s_1 e s_2 concordam nas variáveis livres de φ, elas também concordam nas de ψ, e a hipótese de indução se aplica a ψ.

1. $\varphi \equiv \neg\psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \psi$, então pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \psi$, portanto $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

2. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \chi$, então pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \chi$. Portanto, $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

3. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \chi$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \chi$, então $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

4. $\varphi \equiv \psi \to \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \chi$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \chi$, então $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

5. $\varphi \equiv \psi \leftrightarrow \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, então ou $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \chi$, ou $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \nvDash \chi$. Pela hipótese de indução, ou $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \chi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \nvDash \chi$. Em qualquer caso, $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

6. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, há um $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s_1[m/x] \vDash \psi$. Sejam $s_1' = s_1[m/x]$ e $s_2' = s_2[m/x]$. As variáveis livres de ψ estão entre x_1, $\ldots$, x_n, e x. $s_1'(x_i) = s_2'(x_i)$, já que s_1' e s_2' são x-variantes de s_1 e s_2, respectivamente, e por hipótese $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. $s_1'(x) = s_2'(x) = m$ pela forma como definimos s_1' e s_2'. Então a hipótese de indução se aplica a ψ e s_1', s_2', então $\mathfrak{M}, s_2' \vDash \psi$. Portanto, já que $s_2' = s_2[m/x]$, há um $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \vDash \psi$, e assim $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

7. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$, então para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s_1[m/x] \vDash \psi$. Queremos mostrar que também, para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \vDash \psi$. Então seja $m \in |\mathfrak{M}|$ arbitrário, e considere $s_1' = s[m/x]$ e $s_2' = s[m/x]$. Temos que $\mathfrak{M}, s_1' \vDash \psi$. As variáveis livres de ψ estão entre $x_1, \ldots, x_n$, e x. $s_1'(x_i) = s_2'(x_i)$, já que s_1' e s_2' são x-variantes de s_1 e s_2, respectivamente, e por hipótese $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. $s_1'(x) = s_2'(x) = m$ pela forma como definimos s_1' e s_2'. Então a hipótese de indução se aplica a ψ e s_1', s_2', e temos $\mathfrak{M}, s_2' \vDash \psi$. Isso se aplica a todo $m \in |\mathfrak{M}|$, isto é, $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \vDash \psi$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, então $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$.

Por indução, obtemos que $\mathfrak{M}, s_1 \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \vDash \varphi$ sempre que as variáveis livres em φ estão entre $x_1, \ldots, x_n$ e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. □

Problema 3.3. Complete a prova de Proposição 3.14.

explanation

Sentenças não têm variáveis livres, então quaisquer duas atribuições de variáveis atribuem as mesmas coisas a todas as (zero) variáveis livres de qualquer sentença. A proposição que acabamos de provar significa, então, que se a sentença é satisfeita ou não em uma estrutura relativamente a uma atribuição de variáveis é completamente independente da atribuição. Registraremos esse fato. Ele justifica a definição de satisfação de a sentença em a estrutura (sem mencionar uma atribuição de variáveis) que segue.

fol:syn:ass: cor:sat-sentence

Corolário 3.15. *Se φ é a sentença e s uma atribuição de variáveis, então $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s' \vDash \varphi$ para toda atribuição de variáveis s'.*

Prova. Seja s' uma atribuição de variáveis qualquer. Como φ é a sentença, ela não tem variáveis livres, e assim toda atribuição de variáveis s' trivialmente atribui as mesmas coisas a todas as variáveis livres de φ que faz s. Então a condição de Proposição 3.14 é satisfeita, e temos $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s' \vDash \varphi$. □

fol:syn:ass: defn:satisfaction

Definição 3.16. Se φ é a sentença, dizemos que a estrutura $\mathfrak{M}$ *satisfaz* φ, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, sse $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ para todas as atribuições de variáveis s.

Se $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, também dizemos simplesmente que φ *é verdadeira em* $\mathfrak{M}$. A noção de satisfação se estende naturalmente de sentenças individuais para conjuntos de sentenças.

fol:syn:ass: defn:sat

Definição 3.17. Se Γ é um conjunto de sentenças Γ, dizemos que a estrutura $\mathfrak{M}$ *satisfaz* Γ, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, sse $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$.

fol:syn:ass: prop:sentence-sat-true

Proposição 3.18. *Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura, φ a sentença, e s uma atribuição de variáveis. $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$.*

Prova. Exercício. □

Problema 3.4. Prove Proposição 3.18

fol:syn:ass: prop:sat-quant

Proposição 3.19. *Suponha que $\varphi(x)$ contém apenas x livre, e $\mathfrak{M}$ é a estrutura. Então:*

1. *$\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \varphi(x)$ sse $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$ para pelo menos uma atribuição de variáveis s.*
2. *$\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$ sse $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$ para todas as atribuições de variáveis s.*

Prova. Exercício. □

Problema 3.5. Prove Proposição 3.19.

Problema 3.6. Suponha que $\mathcal{L}$ é uma linguagem sem símbolos de função. Dada uma estrutura $\mathfrak{M}$, c a símbolo de constante e $a \in |\mathfrak{M}|$, defina $\mathfrak{M}[a/c]$ como a estrutura que é exatamente como $\mathfrak{M}$, exceto que $c^{\mathfrak{M}[a/c]} = a$. Defina $\mathfrak{M} \mid\!\models \varphi$ para sentenças φ por:

1. $\varphi \equiv \bot$: não $\mathfrak{M} \models \varphi$.
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M} \models \varphi$.
3. $\varphi \equiv R(d_1, \ldots, d_n)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\langle d_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, d_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$.
4. $\varphi \equiv d_1 = d_2$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $d_1^{\mathfrak{M}} = d_2^{\mathfrak{M}}$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse não $\mathfrak{M} \models \psi$.
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\mathfrak{M} \models \psi$ e $\mathfrak{M} \models \chi$.
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\mathfrak{M} \models \psi$ ou $\mathfrak{M} \models \chi$ (ou ambos).
8. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse não $\mathfrak{M} \models \psi$ ou $\mathfrak{M} \models \chi$ (ou ambos).
9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse ou ambos $\mathfrak{M} \models \psi$ e $\mathfrak{M} \models \chi$, ou nem $\mathfrak{M} \models \psi$ nem $\mathfrak{M} \models \chi$.
10. $\varphi \equiv \forall x\, \psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse para todo $a \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}[a/c] \models \psi[c/x]$, se c não ocorre em ψ.
11. $\varphi \equiv \exists x\, \psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse há um $a \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}[a/c] \models \psi[c/x]$, se c não ocorre em ψ.

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ todas as variáveis livres em φ, $c_1, \ldots, c_n$ símbolos de constante não presentes em φ, $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$, e $s(x_i) = a_i$.

Mostre que $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}[a_1/c_1, \ldots, a_n/c_n] \models \varphi[c_1/x_1] \ldots [c_n/x_n]$.

(Este problema mostra que é possível dar uma semântica para a lógica de primeira ordem que dispensa atribuições de variáveis.)

Problema 3.7. Suponha que f é um símbolo de função não presente em $\varphi(x, y)$. Mostre que há a estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$ sse há uma $\mathfrak{M}'$ tal que $\mathfrak{M}' \vDash \forall x\, \varphi(x, f(x))$.

(Este problema é um caso especial do que é conhecido como Teorema de Skolem; $\forall x\, \varphi(x, f(x))$ é chamado de *forma normal de Skolem* de $\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$.)

3.6 Extensionalidade

explanation

A extensionalidade, às vezes chamada de relevância, pode ser expressa informalmente da seguinte forma: os únicos fatores que influenciam a satisfação de fórmula φ em a estrutura $\mathfrak{M}$ em relação a uma atribuição de variáveis s são o tamanho do domínio e as atribuições feitas por $\mathfrak{M}$ e s aos elementos da linguagem que de fato aparecem em φ.

fol:syn:ext:sec

Uma consequência imediata da extensionalidade é que, quando duas estruturas $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ concordam em todos os elementos da linguagem que aparecem em uma sentença φ e têm o mesmo domínio, $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ também devem concordar quanto a se φ em si é verdadeira ou não.

fol:syn:ext: prop:extensionality

Proposição 3.20 (Extensionalidade). *Seja φ a fórmula, e $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ estruturas com $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_2|$, e s uma atribuição de variáveis sobre $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_2|$. Se $c^{\mathfrak{M}_1} = c^{\mathfrak{M}_2}$, $R^{\mathfrak{M}_1} = R^{\mathfrak{M}_2}$, e $f^{\mathfrak{M}_1} = f^{\mathfrak{M}_2}$ para todo símbolo de constante c, símbolo de relação R, e símbolo de função f que ocorre em φ, então $\mathfrak{M}_1, s \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}_2, s \vDash \varphi$.*

Prova. Primeiro prove (por indução sobre t) que, para todo termo, $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}_1}(t) = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}_2}(t)$. Então prove a proposição por indução sobre φ, fazendo uso da afirmação que acabamos de provar para a base da indução (onde φ é atômica).□

Problema 3.8. Faça a prova de Proposição 3.20 em detalhe.

fol:syn:ext: cor:extensionality-sent

Corolário 3.21 (Extensionalidade para Sentenças). *Seja φ a sentença e $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ como em Proposição 3.20. Então $\mathfrak{M}_1 \vDash \varphi$ sse $\mathfrak{M}_2 \vDash \varphi$.*

Prova. Segue de Proposição 3.20 por Corolário 3.15. □

Além disso, o valor de um termo, e se a estrutura satisfaz ou não a fórmula, dependem apenas dos valores de seus subtermos.

fol:syn:ext: prop:ext-terms

Proposição 3.22. *Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura, t e t' termos, e s uma atribuição de variáveis. Então $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t[t'/x]) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(t)$.*

Prova. Por indução sobre t.

1. Se t é uma constante, digamos, $t \equiv c$, então $t[t'/x] = c$, e $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}} = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(c)$.

2. Se t é uma variável diferente de x, digamos, $t \equiv y$, então $t[t'/x] = y$, e $\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(y) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(y)$ já que $s \sim_x s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]$.

3. Se $t \equiv x$, então $t[t'/x] = t'$. Mas $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(x) = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')$ pela definição de $s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]$.

4. Se $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$ então temos:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t[t'/x]) = \\
&\quad = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(t_1[t'/x], \ldots, t_n[t'/x])) \\
&\qquad \text{pela definição de } t[t'/x] \\
&\quad = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1[t'/x]), \ldots, \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n[t'/x])) \\
&\qquad \text{pela definição de } \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(\ldots)) \\
&\quad = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(t_n)) \\
&\qquad \text{pela hipótese de indução} \\
&\quad = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(t) \text{ pela definição de } \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_{s[\mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}(f(\ldots))
\end{aligned}
$$

□

Proposição 3.23. *Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura, φ a fórmula, t' um termo, e s uma atribuição de variáveis. Então $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi[t'/x]$ sse $\mathfrak{M}, s[\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t')/x] \vDash \varphi$.* fol:syn:ext:prop:ext-formulas

Prova. Exercício. □

Problema 3.9. Prove Proposição 3.23

explanation O ponto de Proposições 3.22 e 3.23 é o seguinte. Suponha que temos um termo t ou a fórmula φ e algum termo t', e queremos saber o valor de $t[t'/x]$ ou se $\varphi[t'/x]$ é ou não satisfeita em a estrutura $\mathfrak{M}$ em relação a uma atribuição de variáveis s. Então podemos ou realizar a substituição primeiro e depois considerar o valor ou a satisfação em relação a $\mathfrak{M}$ e s, ou podemos primeiro determinar o valor $m = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t')$ de t' em $\mathfrak{M}$ em relação a s, mudar a atribuição de variáveis para $s[m/x]$ e então considerar o valor de t em $\mathfrak{M}$ e $s[m/x]$, ou se $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi$. Proposições 3.22 e 3.23 garantem que a resposta será a mesma, independentemente de como o façamos.

3.7 Noções Semânticas

explanation Dada a definição de estruturas para linguagens de primeira ordem, podemos definir algumas propriedades semânticas básicas de sentenças e relações entre elas. A mais simples destas é a noção de *validade* de uma sentença. Uma sentença é válida se é satisfeita em toda estrutura. Sentenças válidas são aquelas que são satisfeitas independentemente de como os símbolos não lógicos nela são interpretados. Sentenças válidas são, portanto, também chamadas de *verdades lógicas*—elas são verdadeiras, isto é, satisfeitas, em qualquer estrutura e, portanto, sua verdade depende apenas dos símbolos lógicos que nelas ocorrem e de sua estrutura sintática, mas não dos símbolos não lógicos ou de sua interpretação. fol:syn:sem:sec

Definição 3.24 (Validade). Uma sentença φ é *válida*, $\vDash \varphi$, sse $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para toda estrutura $\mathfrak{M}$.

Definição 3.25 (Consequência). Uma sentença φ é *consequência* de um conjunto de sentenças Γ, $\Gamma \vDash \varphi$, sse para toda estrutura $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.

Definição 3.26 (Satisfatibilidade). Um conjunto de sentenças Γ é *satisfatível* se $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ para alguma estrutura $\mathfrak{M}$. Se Γ não é satisfatível ele é chamado de *insatisfatível*.

Proposição 3.27. *Uma sentença φ é válida sse $\Gamma \vDash \varphi$ para todo conjunto de sentenças Γ.*

Prova. Para a direção direta, seja φ válida, e seja Γ um conjunto de sentenças. Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura tal que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$. Como φ é válida, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, portanto $\Gamma \vDash \varphi$.

Para a contrapositiva da direção reversa, seja φ inválida, então há a estrutura $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. Quando $\Gamma = \{\top\}$, como $\top$ é válida, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$. Portanto, há a estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ mas $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, portanto φ não é consequência de Γ. □

fol:syn:sem: prop:entails-unsat

Proposição 3.28. *$\Gamma \vDash \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível.*

Prova. Para a direção direta, suponha $\Gamma \vDash \varphi$ e suponha, ao contrário, que há a estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Como $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ e $\Gamma \vDash \varphi$, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Além disso, como $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$, então temos tanto $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ quanto $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, uma contradição. Portanto, não pode haver tal estrutura $\mathfrak{M}$, então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível.

Para a direção reversa, suponha que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível. Então, para toda estrutura $\mathfrak{M}$, ou $\mathfrak{M} \nvDash \Gamma$ ou $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Portanto, para toda estrutura $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, então $\Gamma \vDash \varphi$. □

Problema 3.10.

1. Mostre que $\Gamma \vDash \bot$ sse Γ é insatisfatível.
2. Mostre que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \bot$ sse $\Gamma \vDash \neg\varphi$.
3. Suponha que c não ocorre em φ nem em Γ. Mostre que $\Gamma \vDash \forall x\, \varphi$ sse $\Gamma \vDash \varphi[c/x]$.

Proposição 3.29. *Se $\Gamma \subseteq \Gamma'$ e $\Gamma \vDash \varphi$, então $\Gamma' \vDash \varphi$.*

Prova. Suponha que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ e $\Gamma \vDash \varphi$. Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura tal que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma'$; então $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, e como $\Gamma \vDash \varphi$, obtemos que $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Portanto, sempre que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma'$, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, então $\Gamma' \vDash \varphi$. □

fol:syn:sem: thm:sem-deduction

Teorema 3.30 (Teorema da Dedução Semântica). *$\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ sse $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.*

Prova. Para a direção direta, seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ e seja $\mathfrak{M}$ a estrutura tal que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$. Se $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, então $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, então, como ψ é consequência de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, obtemos $\mathfrak{M} \vDash \psi$. Portanto, $\mathfrak{M} \vDash \varphi \to \psi$, então $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

Para a direção reversa, seja $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$ e $\mathfrak{M}$ a estrutura tal que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$. Então $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, então $\mathfrak{M} \vDash \varphi \to \psi$, e como $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, $\mathfrak{M} \vDash \psi$. Portanto, sempre que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, $\mathfrak{M} \vDash \psi$, então $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$. □

fol:syn:sem: prop:quant-terms

Proposição 3.31. *Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura, e $\varphi(x)$ a fórmula com uma variável livre x, e t um termo fechado. Então:*

1. *$\varphi(t) \vDash \exists x\, \varphi(x)$*
2. *$\forall x\, \varphi(x) \vDash \varphi(t)$*

Prova.

1. Suponha $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$. Seja s uma atribuição de variáveis com $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$. Então $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t)$ já que $\varphi(t)$ é a sentença. Por Proposição 3.23, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$. Por Proposição 3.19, $\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \varphi(x)$.

2. Suponha $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$. Seja s uma atribuição de variáveis com $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$. Por Proposição 3.19, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$. Por Proposição 3.23, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t)$. Por Proposição 3.18, $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$ já que $\varphi(t)$ é a sentença. □

Problema 3.11. Complete a prova de Proposição 3.31.

Capítulo 4

Teorias e Seus Modelos

4.1 Introdução

fol:mat:int:sec

O desenvolvimento do método axiomático é uma conquista significativa na história da ciência, e é de especial importância na história da matemática. Um desenvolvimento axiomático de um campo envolve o esclarecimento de muitas questões: Do que trata o campo? Quais são os conceitos mais fundamentais? Como eles se relacionam? Todos os conceitos do campo podem ser definidos em termos desses conceitos fundamentais? Que leis esses conceitos obedecem, e devem obedecer? explanation

O método axiomático e a lógica foram feitos um para o outro. A lógica formal fornece as ferramentas para formular teorias axiomáticas, para provar teoremas a partir dos axiomas da teoria de uma maneira precisamente especificada, para estudar as propriedades de todos os sistemas que satisfazem os axiomas de uma maneira sistemática.

Definição 4.1. Um conjunto de sentenças Γ é *fechado* sse, sempre que $\Gamma \vDash \varphi$ então $\varphi \in \Gamma$. O *fecho* de um conjunto de sentenças Γ é $\{\varphi : \Gamma \vDash \varphi\}$.

Dizemos que Γ é *axiomatizado por* um conjunto de sentenças Δ se Γ é o fecho de Δ.

Podemos pensar em uma teoria axiomática como o conjunto de sentenças que é axiomatizado por seu conjunto de axiomas Δ. Em outras palavras, quando temos uma linguagem de primeira ordem que contém símbolos não lógicos para os primitivos da ciência desenvolvida axiomaticamente que desejamos estudar, juntamente com um conjunto de sentenças que expressam as leis fundamentais da ciência, podemos pensar na teoria como representada por todas as sentenças nessa linguagem que são consequência dos axiomas. Isso varia de exemplos simples com apenas um único primitivo e axiomas simples, como a teoria das ordens parciais, até teorias complexas como a mecânica newtoniana. explanation

Os fatos lógicos importantes que tornam essa abordagem formal do método axiomático tão importante são os seguintes. Suponha que Γ é um sistema de axiomas para uma teoria, isto é, um conjunto de sentenças.

1. Podemos afirmar precisamente quando um sistema de axiomas captura uma classe pretendida de estruturas. Isto é, se estamos interessados em uma certa classe de estruturas, capturaremos com sucesso essa classe por um sistema de axiomas Γ sse as estruturas são exatamente aquelas $\mathfrak{M}$ tais que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$.

2. Podemos falhar nesse aspecto porque há $\mathfrak{M}$ tais que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, mas $\mathfrak{M}$ não é uma das estruturas que pretendemos. Isso pode nos levar a adicionar axiomas que não são verdadeiros em $\mathfrak{M}$.

3. Se somos bem-sucedidos pelo menos no aspecto de que Γ é verdadeiro em todas as estruturas pretendidas, então uma sentença φ é verdadeira em todas as estruturas pretendidas sempre que $\Gamma \vDash \varphi$. Assim, podemos usar ferramentas lógicas (como métodos de derivação) para mostrar que sentenças são verdadeiras em todas as estruturas pretendidas simplesmente mostrando que elas são consequência dos axiomas.

4. Às vezes não temos estruturas pretendidas em mente, mas em vez disso partimos dos próprios axiomas: começamos com alguns primitivos que queremos que satisfaçam certas leis que codificamos em um sistema de axiomas. Uma coisa que gostaríamos de verificar imediatamente é que os axiomas não se contradizem: se o fizerem, não pode haver conceitos que obedeçam a essas leis, e teremos tentado estabelecer uma teoria incoerente. Podemos verificar que isso não acontece encontrando um modelo de Γ. E se há modelos da nossa teoria, podemos usar métodos lógicos para investigá-los, e também podemos usar métodos lógicos para construir modelos.

5. A independência dos axiomas é, igualmente, uma questão importante. Pode acontecer que um dos axiomas seja, na verdade, uma consequência dos outros, e seja, portanto, redundante. Podemos provar que um axioma φ em Γ é redundante provando $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vDash \varphi$. Também podemos provar que um axioma não é redundante mostrando que $(\Gamma \setminus \{\varphi\}) \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfatível. Por exemplo, foi assim que se mostrou que o postulado das paralelas é independente dos outros axiomas da geometria.

6. Outra questão importante é a da definibilidade de conceitos em uma teoria: A escolha da linguagem determina em que consistem os modelos de uma teoria. Mas nem todo aspecto de uma teoria deve ser representado separadamente em seus modelos. Por exemplo, toda ordenação $\leq$ determina uma ordenação estrita correspondente $<$—dada uma, nós podemos definir a outra. Então não é necessário que um modelo de uma teoria que envolve tal ordem deva conter *também* a ordenação estrita correspondente. Quando é o caso, em geral, de que uma relação pode ser definida em termos de outras? Quando é impossível definir uma relação em termos de outras (e, portanto, deve-se adicioná-la aos primitivos da linguagem)?

4.2 Expressando Propriedades de Estruturas

fol:mat:exs:sec

explanation

Frequentemente é útil e importante expressar condições sobre funções e relações, ou, mais geralmente, que as funções e relações em uma estrutura satisfaçam essas condições. Por exemplo, nós gostaríamos de ter maneiras de distinguir aquelas estruturas para uma linguagem que "capturam" o que queremos que os símbolos de predicado "signifiquem" daquelas que não capturam. É claro que somos completamente livres para especificar quais estruturas "pretendemos", por exemplo, podemos especificar que a interpretação do símbolo de predicado $\leq$ deve ser uma ordenação, ou que estamos interessados apenas em interpretações de $\mathcal{L}$ nas quais o domínio consiste em conjuntos e $\in$ é interpretado pela relação "é um membro de". Mas podemos fazer isso com sentenças da linguagem? Em outras palavras, quais condições sobre a estrutura $\mathfrak{M}$ podemos expressar por a sentença (ou talvez um conjunto de sentenças) na linguagem de $\mathfrak{M}$? Há algumas condições que não conseguiremos expressar. Por exemplo, não há sentença de $\mathcal{L}_A$ que seja verdadeira em uma estrutura $\mathfrak{M}$ somente se $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$. Não podemos expressar "o domínio contém apenas números naturais". Mas há "propriedades estruturais" de estruturas que talvez possamos expressar. Quais propriedades de estruturas podemos expressar por sentenças? Ou, dito de outra forma, quais coleções de estruturas podemos descrever como aquelas que tornam a sentença (ou conjunto de sentenças) verdadeira?

Definição 4.2 (Modelo de um conjunto). Seja Γ um conjunto de sentenças em uma linguagem $\mathcal{L}$. Nós dizemos que a estrutura $\mathfrak{M}$ *é um modelo de* Γ se $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$.

Exemplo 4.3. A sentença $\forall x\, x \leq x$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é uma relação reflexiva. A sentença $\forall x \forall y\, ((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é antissimétrica. A sentença $\forall x \forall y \forall z\, ((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z)$ é verdadeira em $\mathfrak{M}$ sse $\leq^{\mathfrak{M}}$ é transitiva. Assim, os modelos de

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x\, x \leq x, \\ \forall x \forall y\, ((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y), \\ \forall x \forall y \forall z\, ((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z) \end{array} \right\}$$

são exatamente aquelas estruturas nas quais $\leq^{\mathfrak{M}}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é, uma ordem parcial. Portanto, podemos tomá-las como axiomas para a *teoria de primeira ordem das ordens parciais*.

4.3 Exemplos de Teorias de Primeira Ordem

fol:mat:the:sec

Exemplo 4.4. A teoria das ordens lineares estritas na linguagem $\mathcal{L}_<$ é axiomatizada pelo conjunto

$$\begin{aligned}\{\quad & \forall x \neg x < x, \\ & \forall x \forall y \left((x < y \vee y < x) \vee x = y\right), \\ & \forall x \forall y \forall z \left((x < y \wedge y < z) \to x < z\right) \quad \}\end{aligned}$$

Ela captura completamente as estruturas pretendidas: toda ordem linear estrita é um modelo deste sistema de axiomas e, vice-versa, se R é uma ordem linear sobre um conjunto X, então a estrutura $\mathfrak{M}$ com $|\mathfrak{M}| = X$ e $<^{\mathfrak{M}} = R$ é um modelo desta teoria.

Exemplo 4.5. A teoria dos grupos na linguagem $\mathtt{1}$ (símbolo de constante), $\cdot$ (símbolo de função de dois lugares) é axiomatizada por

$$\begin{aligned}&\forall x \, (x \cdot \mathtt{1}) = x \\ &\forall x \forall y \forall z \, (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z) \\ &\forall x \exists y \, (x \cdot y) = \mathtt{1}\end{aligned}$$

Exemplo 4.6. A teoria da aritmética de Peano é axiomatizada pelas seguintes sentenças na linguagem da aritmética $\mathcal{L}_A$.

$$\begin{aligned}&\forall x \forall y \, (x' = y' \to x = y) \\ &\forall x \, \mathtt{0} \neq x' \\ &\forall x \, (x + \mathtt{0}) = x \\ &\forall x \forall y \, (x + y') = (x + y)' \\ &\forall x \, (x \times \mathtt{0}) = \mathtt{0} \\ &\forall x \forall y \, (x \times y') = ((x \times y) + x) \\ &\forall x \forall y \, (x < y \leftrightarrow \exists z \, (z' + x) = y)\end{aligned}$$

mais todas as sentenças da forma

$$(\varphi(\mathtt{0}) \wedge \forall x \, (\varphi(x) \to \varphi(x'))) \to \forall x \, \varphi(x)$$

Como há infinitas sentenças desta última forma, este sistema de axiomas é infinito. Esta última forma é chamada de *esquema de indução*. (Na verdade, o esquema de indução é um pouco mais complicado do que deixamos transparecer aqui.)

O último axioma é uma *definição explícita* de $<$.

Exemplo 4.7. A teoria dos conjuntos puros desempenha um papel importante nos fundamentos (e na filosofia) da matemática. Um conjunto é puro se todos os seus membros são também conjuntos puros. O conjunto vazio conta, portanto, como puro, mas um conjunto que tem como um membro algo que não é um conjunto não seria puro. Então os conjuntos puros são aqueles que são formados

apenas a partir do conjunto vazio e sem "urelementos", isto é, objetos que não são, eles próprios, conjuntos.

O seguinte poderia ser considerado um sistema de axiomas para uma teoria dos conjuntos puros:

$$\begin{aligned}
&\exists x \neg \exists y\, y \in x \\
&\forall x \forall y \left(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\right) \\
&\forall x \forall y \exists z \forall u \left(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)\right) \\
&\forall x \exists y \forall z \left(z \in y \leftrightarrow \exists u \left(z \in u \wedge u \in x\right)\right)
\end{aligned}$$

mais todas as sentenças da forma

$$\exists x \forall y \left(y \in x \leftrightarrow \varphi(y)\right)$$

O primeiro axioma diz que há um conjunto sem membros (isto é, $\emptyset$ existe); o segundo diz que conjuntos são extensionais; o terceiro que, para quaisquer conjuntos X e Y, o conjunto $\{X, Y\}$ existe; o quarto que, para qualquer conjunto X, o conjunto $\cup X$ existe, onde $\cup X$ é a união de todos os elementos de X.

As sentenças mencionadas por último são chamadas coletivamente de *esquema de compreensão ingênuo*. Ele essencialmente diz que, para todo $\varphi(x)$, o conjunto $\{x : \varphi(x)\}$ existe—então, à primeira vista, um axioma verdadeiro, útil e talvez até necessário. É chamado de "ingênuo" porque, como se vê, ele torna esta teoria insatisfatível: se você toma $\varphi(y)$ como $\neg y \in y$, obtém a sentença

$$\exists x \forall y \left(y \in x \leftrightarrow \neg y \in y\right)$$

e esta sentença não é satisfeita em nenhuma estrutura.

Exemplo 4.8. Na área da *mereologia*, a relação de *parte* é uma relação fundamental. Assim como as teorias de conjuntos, há teorias de parte que axiomatizam várias concepções (às vezes conflitantes) dessa relação.

A linguagem da mereologia contém um único símbolo de predicado de dois lugares P, e $P(x, y)$ "significa" que x é uma parte de y. Quando temos essa interpretação em mente, a estrutura para essa linguagem é chamada de *estrutura de parte*. É claro que nem toda estrutura para um único predicado de dois lugares realmente merecerá esse nome. Para ter uma chance de capturar "parte", $P^{\mathfrak{M}}$ deve satisfazer algumas condições, que podemos estabelecer como axiomas para uma teoria de parte. Por exemplo, a parte é uma ordem parcial sobre objetos: todo objeto é uma parte (ainda que uma parte *imprópria*) de si mesmo; dois objetos diferentes não podem ser partes um do outro; uma parte de uma parte de um objeto é, ela própria, parte daquele objeto. Note que, nesse sentido, "é uma parte de" se assemelha a "é um subconjunto de", mas não se assemelha a "é um elemento de", que não é nem reflexiva nem transitiva.

$$\begin{aligned}
&\forall x\, P(x, x) \\
&\forall x \forall y \left((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow x = y\right) \\
&\forall x \forall y \forall z \left((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)\right)
\end{aligned}$$

Além disso, quaisquer dois objetos têm uma soma mereológica (um objeto que tem esses dois objetos como partes, e é minimal nesse aspecto).

$$\forall x \, \forall y \, \exists z \, \forall u \, (P(z, u) \leftrightarrow (P(x, u) \land P(y, u)))$$

Estes são apenas alguns dos princípios básicos de parte considerados pelos metafísicos. Princípios adicionais, no entanto, rapidamente se tornam difíceis de formular ou escrever sem primeiro introduzir algumas relações definidas. Por exemplo, a maioria dos metafísicos interessados em mereologia também considera o seguinte como um princípio válido: sempre que um objeto x tem uma parte própria y, ele também tem uma parte z que não tem partes em comum com y, e tal que a fusão de y e z é x.

4.4 Expressando Relações em a Estrutura

explanation

Um uso principal que se pode dar às fórmulas é expressar propriedades e relações em a estrutura $\mathfrak{M}$ em termos dos primitivos da linguagem $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{M}$. Com isso queremos dizer o seguinte: o domínio de $\mathfrak{M}$ é um conjunto de objetos. Os símbolos de constante, símbolos de função e símbolos de predicado são interpretados em $\mathfrak{M}$ por alguns objetos em $|\mathfrak{M}|$, funções sobre $|\mathfrak{M}|$, e relações sobre $|\mathfrak{M}|$. Por exemplo, se A^2_0 está em $\mathcal{L}$, então $\mathfrak{M}$ atribui a ele uma relação $R = A^{2\mathfrak{M}}_0$. Então a fórmula $A^2_0(v_1, v_2)$ *expressa* exatamente essa relação, no seguinte sentido: se uma atribuição de variáveis s mapeia v_1 para $a \in |\mathfrak{M}|$ e v_2 para $b \in |\mathfrak{M}|$, então

fol:mat:exr:sec

$$Rab \quad \text{sse} \quad \mathfrak{M}, s \vDash A^2_0(v_1, v_2).$$

Note que temos que envolver atribuições de variáveis aqui: não podemos simplesmente dizer "Rab sse $\mathfrak{M} \vDash A^2_0(a, b)$" porque a e b não são símbolos da nossa linguagem: eles são membros de $|\mathfrak{M}|$.

Como não temos apenas fórmulas atômicas, mas podemos combiná-las usando os conectivos lógicos e os quantificadores, fórmulas mais complexas podem definir outras relações que não estão diretamente embutidas em $\mathfrak{M}$. Estamos interessados em como fazer isso e, especificamente, quais relações podemos definir em a estrutura.

Definição 4.9. Seja $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ a fórmula de $\mathcal{L}$ na qual apenas $v_1, \ldots, v_n$ ocorrem livres, e seja $\mathfrak{M}$ a estrutura para $\mathcal{L}$. $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ *expressa a relação* $R \subseteq |\mathfrak{M}|^n$ sse

$$Ra_1 \ldots a_n \quad \text{sse} \quad \mathfrak{M}, s \vDash \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

para qualquer atribuição de variáveis s com $s(v_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Exemplo 4.10. No modelo padrão da aritmética $\mathfrak{N}$, a fórmula $v_1 < v_2 \lor v_1 = v_2$ expressa a relação $\leq$ sobre $\mathbb{N}$. A fórmula $v_2 = v_1'$ expressa a relação sucessora, isto é, a relação $R \subseteq \mathbb{N}^2$ onde Rnm vale se m é o sucessor de n. A fórmula $v_1 = v_2'$ expressa a relação predecessora. As fórmulas $\exists v_3 \, (v_3 \neq 0 \land v_2 = (v_1 + v_3))$ e

$\exists v_3\,(v_1 + v_3{}') = v_2$ ambas expressam a relação $<$. Isso significa que o símbolo de predicado $<$ é, na verdade, supérfluo na linguagem da aritmética; ele pode ser definido.

Essa ideia não é interessante apenas em estruturas específicas, mas geralmente sempre que usamos uma linguagem para descrever um modelo ou modelos pretendidos, isto é, quando consideramos teorias. Essas teorias frequentemente contêm apenas alguns símbolos de predicado como símbolos básicos, mas no domínio que elas são usadas para descrever muitas outras relações frequentemente desempenham um papel importante. Se essas outras relações podem ser sistematicamente expressas pelas relações que interpretam os símbolos de predicado básicos da linguagem, nós dizemos que podemos *defini-las* na linguagem. explanation

Problema 4.1. Encontre fórmulas em $\mathcal{L}_A$ que definam as seguintes relações:

1. n está entre i e j;
2. n divide m exatamente (isto é, m é um múltiplo de n);
3. n é um número primo (isto é, nenhum número além de 1 e n divide n exatamente).

Problema 4.2. Suponha que a fórmula $\varphi(v_1, v_2)$ expressa a relação $R \subseteq |\mathfrak{M}|^2$ em a estrutura $\mathfrak{M}$. Encontre fórmulas que expressem as seguintes relações:

1. a inversa R^{-1} de R;
2. o produto relativo $R \mid R$;

Você consegue encontrar uma maneira de expressar R^+, o fecho transitivo de R?

Problema 4.3. Seja $\mathcal{L}$ a linguagem contendo apenas um símbolo de predicado de 2 lugares $<$ (sem outros símbolos de constante, símbolos de função ou símbolos de predicado— exceto, é claro, $=$). Seja $\mathfrak{N}$ a estrutura tal que $|\mathfrak{N}| = \mathbb{N}$, e $<^{\mathfrak{N}} = \{\langle n, m\rangle : n < m\}$. Prove o seguinte:

1. $\{0\}$ é definível em $\mathfrak{N}$;
2. $\{1\}$ é definível em $\mathfrak{N}$;
3. $\{2\}$ é definível em $\mathfrak{N}$;
4. para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{n\}$ é definível em $\mathfrak{N}$;
5. todo subconjunto finito de $|\mathfrak{N}|$ é definível em $\mathfrak{N}$;
6. todo subconjunto cofinito de $|\mathfrak{N}|$ é definível em $\mathfrak{N}$ (onde $X \subseteq \mathbb{N}$ é cofinito sse $\mathbb{N} \setminus X$ é finito).

4.5 A Teoria dos Conjuntos

fol:mat:set:sec

Quase toda a matemática pode ser desenvolvida na teoria dos conjuntos. Desenvolver a matemática nessa teoria envolve uma série de coisas. Primeiro, requer um conjunto de axiomas para a relação $\in$. Vários sistemas de axiomas diferentes foram desenvolvidos, às vezes com propriedades conflitantes de $\in$. O sistema de axiomas conhecido como **ZFC**, a teoria dos conjuntos de Zermelo–Fraenkel com o axioma da escolha, destaca-se: é de longe o mais amplamente usado e estudado, porque acontece que seus axiomas bastam para provar quase todas as coisas que os matemáticos esperam ser capazes de provar. Mas antes que isso possa ser estabelecido, é primeiro necessário deixar claro como podemos sequer *expressar* todas as coisas que os matemáticos gostariam de expressar. Para começar, a linguagem não contém símbolos de constante nem símbolos de função, então parece, à primeira vista, pouco claro que possamos falar sobre conjuntos particulares (como $\emptyset$ ou $\mathbb{N}$), falar sobre operações sobre conjuntos (como $X \cup Y$ e $\wp(X)$), muito menos outras construções que envolvem coisas diferentes de conjuntos, como relações e funções.

Para começar, "é um elemento de" não é a única relação na qual estamos interessados: "é um subconjunto de" parece quase tão importante. Mas nós podemos *definir* "é um subconjunto de" em termos de "é um elemento de". Para fazer isso, temos que encontrar a fórmula $\varphi(x, y)$ na linguagem da teoria dos conjuntos que é satisfeita por um par de conjuntos $\langle X, Y \rangle$ sse $X \subseteq Y$. Mas X é um subconjunto de Y exatamente quando todos os membros de X são também membros de Y. Então podemos definir $\subseteq$ pela fórmula

$$\forall z\, (z \in x \to z \in y)$$

Agora, sempre que quisermos usar a relação $\subseteq$ em uma fórmula, nós poderíamos, em vez disso, usar aquela fórmula (com x e y adequadamente substituídos, e a variável ligada z renomeada se necessário). Por exemplo, a extensionalidade dos conjuntos significa que se quaisquer conjuntos x e y estão contidos um no outro, então x e y devem ser o mesmo conjunto. Isso pode ser expresso por $\forall x \forall y\, ((x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \to x = y)$, ou, se substituirmos $\subseteq$ pela definição acima, por

$$\forall x \forall y\, ((\forall z\, (z \in x \to z \in y) \wedge \forall z\, (z \in y \to z \in x)) \to x = y).$$

Este é, de fato, um dos axiomas de **ZFC**, o "axioma da extensionalidade".

Não há símbolo de constante para $\emptyset$, mas podemos expressar "x é vazio" por $\neg \exists y\, y \in x$. Então "$\emptyset$ existe" torna-se a sentença $\exists x \neg \exists y\, y \in x$. Este é outro axioma de **ZFC**. (Note que o axioma da extensionalidade implica que há apenas um conjunto vazio.) Sempre que quisermos falar sobre $\emptyset$ na linguagem da teoria dos conjuntos, nós escreveríamos isso como "há um conjunto que é vazio e ..." Como exemplo, para expressar o fato de que $\emptyset$ é um subconjunto de todo conjunto, poderíamos escrever

$$\exists x\, (\neg \exists y\, y \in x \wedge \forall z\, x \subseteq z)$$

onde, é claro, $x \subseteq z$ teria, por sua vez, que ser substituído por sua definição.

Para falar sobre operações sobre conjuntos, como $X \cup Y$ e $\wp(X)$, nós temos que usar um truque semelhante. Não há símbolos de função na linguagem da teoria dos conjuntos, mas podemos expressar as relações funcionais $X \cup Y = Z$ e $\wp(X) = Y$ por

$$\forall u\,((u \in x \vee u \in y) \leftrightarrow u \in z)$$
$$\forall u\,(u \subseteq x \leftrightarrow u \in y)$$

já que os membros de $X \cup Y$ são exatamente os conjuntos que são ou membros de X ou membros de Y, e os membros de $\wp(X)$ são exatamente os subconjuntos de X. No entanto, isso não nos permite usar $x \cup y$ ou $\wp(x)$ como se fossem termos: só podemos usar as fórmulas inteiras que definem as relações $X \cup Y = Z$ e $\wp(X) = Y$. De fato, não sabemos que essas relações são alguma vez satisfeitas, isto é, não sabemos que uniões e conjuntos potência sempre existem. Por exemplo, a sentença $\forall x\,\exists y\,\wp(x) = y$ é outro axioma de **ZFC** (o axioma do conjunto potência).

E quanto a falar de pares ordenados ou funções? Aqui temos que explicar como podemos pensar em pares ordenados e funções como tipos especiais de conjuntos. Uma maneira de definir o par ordenado $\langle x, y\rangle$ é como o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Mas, como antes, não podemos introduzir a símbolo de função que nomeie esse conjunto; só podemos definir a relação $\langle x, y\rangle = z$, isto é, $\{\{x\}, \{x, y\}\} = z$:

$$\forall u\,(u \in z \leftrightarrow (\forall v\,(v \in u \leftrightarrow v = x) \vee \forall v\,(v \in u \leftrightarrow (v = x \vee v = y))))$$

Isso diz que os membros u de z são exatamente aqueles conjuntos que ou têm x como seu único membro ou têm x e y como seus únicos membros (em outras palavras, aqueles conjuntos que são ou idênticos a $\{x\}$ ou idênticos a $\{x, y\}$). Uma vez que temos isso, podemos dizer outras coisas, por exemplo, que $X \times Y = Z$:

$$\forall z\,(z \in Z \leftrightarrow \exists x\,\exists y\,(x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y\rangle = z))$$

Uma função $f\colon X \to Y$ pode ser pensada como a relação $f(x) = y$, isto é, como o conjunto de pares $\{\langle x, y\rangle : f(x) = y\}$. Nós podemos então dizer que um conjunto f é uma função de X em Y se (a) é uma relação $\subseteq X \times Y$, (b) é total, isto é, para todo $x \in X$ há algum $y \in Y$ tal que $\langle x, y\rangle \in f$ e (c) é funcional, isto é, sempre que $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in f$, $y = y'$ (porque os valores de funções devem ser únicos). Então "f é uma função de X em Y" pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}&\forall u\,(u \in f \to \exists x\,\exists y\,(x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y\rangle = u)) \wedge\\ &\forall x\,(x \in X \to (\exists y\,(y \in Y \wedge \text{mapeia}(f, x, y)) \wedge\\ &\qquad\qquad (\forall y\,\forall y'\,((\text{mapeia}(f, x, y) \wedge \text{mapeia}(f, x, y')) \to y = y')))\end{aligned}$$

onde $\text{mapeia}(f, x, y)$ abrevia $\exists v\,(v \in f \wedge \langle x, y\rangle = v)$ (esta fórmula expressa "$f(x) = y$").

Agora também não é difícil expressar que $f\colon X \to Y$ é injetiva, por exemplo:

$$f\colon X \to Y \wedge \forall x\, \forall x' \,((x \in X \wedge x' \in X \wedge \\ \exists y\, (\text{mapeia}(f, x, y) \wedge \text{mapeia}(f, x', y))) \to x = x')$$

Uma função $f\colon X \to Y$ é injetiva sse, sempre que f mapeia $x, x' \in X$ para um único y, $x = x'$. Se abreviarmos esta fórmula como $\text{inj}(f, X, Y)$, já estamos em posição de afirmar na linguagem da teoria dos conjuntos algo tão não trivial quanto o teorema de Cantor: não há função injetiva de $\wp(X)$ em X:

$$\forall X\, \forall Y\, (\wp(X) = Y \to \neg \exists f\, \text{inj}(f, Y, X))$$

Poderíamos pensar que a teoria dos conjuntos requer outro axioma que garanta a existência de um conjunto para toda propriedade definidora. Se $\varphi(x)$ é uma fórmula da teoria dos conjuntos com a variável x livre, podemos considerar a sentença

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Esta sentença afirma que há um conjunto y cujos membros são todos e somente aqueles x que satisfazem $\varphi(x)$. Este esquema é chamado de "princípio da compreensão". Parece muito útil; infelizmente é inconsistente. Tome $\varphi(x) \equiv \neg x \in x$, então o princípio da compreensão afirma

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \notin x),$$

isto é, afirma a existência de um conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos. Nenhum tal conjunto pode existir—este é o Paradoxo de Russell. **ZFC**, de fato, contém uma versão restrita—e consistente—deste princípio, o princípio da separação:

$$\forall z\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x)).$$

Problema 4.4. Mostre que o princípio da compreensão é inconsistente dando a derivação que mostre

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \notin x) \vdash \bot.$$

Pode ajudar mostrar primeiro $(A \to \neg A) \wedge (\neg A \to A) \vdash \bot$.

4.6 Expressando o Tamanho de Estruturas

explanation

Há algumas propriedades de estruturas que podemos expressar mesmo sem usar os símbolos não lógicos de uma linguagem. Por exemplo, há sentenças que são verdadeiras em a estrutura se, e somente se, o domínio da estrutura tem pelo menos, no máximo ou exatamente um certo número n de membros.

fol:mat:siz:sec

Proposição 4.11. *A sentença*

$$\begin{aligned}\varphi_{\geq n} \equiv \exists x_1\, \exists x_2\, \ldots \exists x_n \\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \\ x_{n-1} \neq x_n)\end{aligned}$$

é verdadeira em a estrutura $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém pelo menos n membros. Consequentemente, $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi_{\geq n+1}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém no máximo n membros.

Proposição 4.12. *A sentença*

$$\begin{aligned}\varphi_{=n} \equiv \exists x_1\, \exists x_2\, \ldots \exists x_n \\ (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge \\ x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \\ \vdots \\ x_{n-1} \neq x_n \wedge \\ \forall y\, (y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n))\end{aligned}$$

é verdadeira em a estrutura $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ contém exatamente n membros.

Proposição 4.13. *Uma estrutura é infinita se, e somente se, é um modelo de*

$$\{\varphi_{\geq 1}, \varphi_{\geq 2}, \varphi_{\geq 3}, \ldots\}.$$

Não há uma única sentença puramente lógica que seja verdadeira em $\mathfrak{M}$ se, e somente se, $|\mathfrak{M}|$ é infinito. No entanto, pode-se dar sentenças com símbolos de predicado não lógicos que só têm modelos infinitos (embora nem toda estrutura infinita seja modelo delas). A propriedade de ser uma estrutura finita e a propriedade de ser uma estrutura não enumerável nem sequer podem ser expressas com um conjunto infinito de sentenças. Estes fatos seguem dos teoremas da compacidade e de Löwenheim–Skolem.

Capítulo 5

Sistemas de Derivação

Este capítulo reúne material geral sobre sistemas de derivação. Um livro-texto que usa um sistema específico pode inserir a seção de introdução mais a seção de panorama relevante no início do capítulo que introduz esse sistema.

5.1 Introdução

fol:prf:int:sec

As lógicas comumente têm tanto uma semântica quanto um sistema de derivação. A semântica trata de conceitos como verdade, satisfatibilidade, validade e consequência. O propósito dos sistemas de derivação é fornecer um método puramente sintático de estabelecer consequência e validade. Eles são puramente sintáticos no sentido de que uma derivação em tal sistema é um objeto sintático finito, geralmente uma sequência (ou outra disposição finita) de sentenças ou fórmulas. Bons sistemas de derivação têm a propriedade de que qualquer sequência ou disposição dada de sentenças ou fórmulas pode ser verificada mecanicamente como "correta".

Os sistemas de derivação mais simples (e historicamente os primeiros) para a lógica de primeira ordem foram *axiomáticos*. Uma sequência de fórmulas conta como uma derivação em tal sistema se cada fórmula individual nela é ou está entre um conjunto fixo de "axiomas" ou segue de fórmulas anteriores na sequência por uma entre um número fixo de "regras de inferência"—e pode ser verificado mecanicamente se uma fórmula é um axioma e se segue corretamente de outras fórmulas por uma das regras de inferência. Sistemas de derivação axiomáticos são fáceis de descrever—e também fáceis de tratar meta-teoricamente—mas as derivações neles são difíceis de ler e entender, e também difíceis de produzir.

Outros sistemas de derivação foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar a construção de derivações ou facilitar a compreensão de derivações uma vez completas. Exemplos são a dedução natural, árvores de verdade, também

conhecidas como provas por tableaux, e o cálculo de sequentes. Alguns sistemas de derivação são projetados especialmente com a mecanização em mente; por exemplo, o método da resolução é fácil de implementar em software (mas suas derivações são essencialmente impossíveis de entender). A maioria desses outros sistemas de derivação representa derivações como árvores de fórmulas em vez de sequências. Isso facilita ver quais partes de uma derivação dependem de quais outras partes.

Assim, para uma dada lógica, como a lógica de primeira ordem, os diferentes sistemas de derivação darão diferentes explicações do que significa uma sentença ser um *teorema* e o que significa uma sentença ser derivável a partir de outras. Seja como for feito isso (via derivações axiomáticas, deduções naturais, derivações de sequentes, árvores de verdade, refutações por resolução), queremos que essas relações correspondam às noções semânticas de validade e consequência. Escrevamos $\vdash \varphi$ para "φ é um teorema" e "$\Gamma \vdash \varphi$" para "φ é derivável de Γ." Seja como for $\vdash$ definido, queremos que corresponda a $\vDash$, isto é:

1. $\vdash \varphi$ se, e somente se, $\vDash \varphi$
2. $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vDash \varphi$

A direção "somente se" acima é chamada de *correção*. Um sistema de derivação é correto se a derivabilidade garante consequência (ou validade). Todo sistema de derivação decente tem que ser correto; sistemas de derivação incorretos não são úteis de modo algum. Afinal, o propósito inteiro de uma derivação é fornecer uma garantia sintática de validade ou consequência. Provaremos a correção para os sistemas de derivação que apresentamos.

A direção conversa "se" também é importante: é chamada de *completude*. Um sistema de derivação completo é forte o suficiente para mostrar que φ é um teorema sempre que φ é válida, e que $\Gamma \vdash \varphi$ sempre que $\Gamma \vDash \varphi$. A completude é mais difícil de estabelecer, e algumas lógicas não têm sistemas de derivação completos. A lógica de primeira ordem tem. Kurt Gödel foi o primeiro a provar a completude para um sistema de derivação da lógica de primeira ordem em sua dissertação de 1929.

Outro conceito ligado aos sistemas de derivação é o de *consistência*. Um conjunto de sentenças é chamado inconsistente se qualquer coisa pode ser derivada dele, e consistente caso contrário. A inconsistência é a contrapartida sintática da insatisfatibilidade: como conjuntos insatisfatíveis, conjuntos inconsistentes de sentenças não fazem boas teorias; são defeituosos de maneira fundamental. Conjuntos consistentes de sentenças podem não ser verdadeiros ou úteis, mas pelo menos passam esse limiar mínimo de utilidade lógica. Para diferentes sistemas de derivação, a definição específica de consistência de conjuntos de sentenças pode diferir, mas como $\vdash$, queremos que a consistência coincida com sua contrapartida semântica, a satisfatibilidade. Queremos que seja sempre o caso que Γ é consistente se, e somente se, é satisfatível. Aqui, a direção "somente se" corresponde à completude (consistência garante satisfatibilidade), e a direção "se" corresponde à correção (satisfatibilidade garante

consistência). De fato, para a lógica clássica de primeira ordem, as duas versões de correção e completude são equivalentes.

5.2 O Cálculo de Sequentes

fol:prf:seq:sec

Enquanto muitos sistemas de derivação operam com disposições de sentenças, o cálculo de sequentes opera com *sequentes*. Um sequente é uma expressão da forma

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_m,$$

isto é, um par de sequências de sentenças, separadas pelo símbolo de sequente $\Rightarrow$. Qualquer uma das sequências pode ser vazia. Uma derivação no cálculo de sequentes é uma árvore de sequentes, em que os sequentes mais altos são de uma forma especial (são chamados de "sequentes iniciais" ou "axiomas") e todo outro sequente segue dos sequentes imediatamente acima dele por uma das regras de inferência. As regras de inferência ou manipulam as sentenças nos sequentes (adicionando, removendo ou rearranjando-as à esquerda ou à direita), ou introduzem uma fórmula complexa na conclusão da regra. Por exemplo, a regra $\wedge$L permite a inferência de $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ para $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, e a $\rightarrow$R permite a inferência de $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ para $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$, para quaisquer Γ, Δ, φ e ψ. (Em particular, Γ e Δ podem ser vazios.)

A relação $\vdash$ baseada no cálculo de sequentes é definida da seguinte forma: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, há alguma sequência Γ_0 tal que toda φ em Γ_0 está em Γ e há uma derivação com o sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ em sua raiz. φ é um teorema no cálculo de sequentes se o sequente $\Rightarrow \varphi$ tem uma derivação. Por exemplo, aqui está uma derivação que mostra que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\wedge\text{L}}{\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}\rightarrow\text{R}$$

Um conjunto Γ é inconsistente no cálculo de sequentes se há uma derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow$ (em que toda $\varphi \in \Gamma_0$ está em Γ e o lado direito do sequente é vazio). Usando a regra WR, qualquer sentença pode ser derivada a partir de um conjunto inconsistente.

O cálculo de sequentes foi inventado na década de 1930 por Gerhard Gentzen. Por causa de seu desenho sistemático e simétrico, é um formalismo muito útil para desenvolver uma teoria de derivações. É relativamente fácil encontrar derivações no cálculo de sequentes, mas essas derivações são frequentemente difíceis de ler e sua conexão com provas às vezes não é fácil de ver. Provou ser uma abordagem muito elegante a sistemas de derivação, no entanto, e muitas lógicas têm sistemas de cálculo de sequentes.

5.3 Dedução Natural

fol:prf:ntd:sec

A dedução natural é um sistema de derivação destinado a espelhar o raciocínio real (especialmente o tipo de raciocínio regimentado empregado por matemáticos). O raciocínio real procede por vários padrões "naturais". Por exemplo, a prova por casos nos permite estabelecer uma conclusão com base em uma premissa disjuntiva, estabelecendo que a conclusão segue de qualquer um dos disjuntos. A prova indireta nos permite estabelecer uma conclusão mostrando que sua negação leva a uma contradição. A prova condicional estabelece uma afirmação condicional "se ... então ..." mostrando que o consequente segue do antecedente. A dedução natural é uma formalização de algumas dessas inferências naturais. Cada um dos conectivos lógicos e quantificadores vem com duas regras, uma de introdução e uma de eliminação, e cada uma corresponde a um desses padrões de inferência natural. Por exemplo, $\to$Intro corresponde à prova condicional, e $\vee$Elim à prova por casos. Uma regra particularmente simples é $\wedge$Elim, que permite a inferência de $\varphi \wedge \psi$ para φ (ou ψ).

Uma característica que distingue a dedução natural de outros sistemas de derivação é o uso de hipóteses. Uma derivação em dedução natural é uma árvore de fórmulas. Uma única fórmula fica na raiz da árvore de fórmulas, e as "folhas" da árvore são fórmulas das quais a conclusão é derivada. Na dedução natural, algumas fórmulas folha desempenham um papel dentro da derivação, mas são "consumidas" quando a derivação atinge a conclusão. Isso corresponde à prática, no raciocínio real, de introduzir hipóteses que só permanecem em vigor por um curto período. Por exemplo, em uma prova por casos, assumimos a verdade de cada um dos disjuntos; na prova condicional, assumimos a verdade do antecedente; na prova indireta, assumimos a verdade da negação da conclusão. Essa maneira de introduzir hipóteses hipotéticas e depois descartá-las a serviço de estabelecer um passo intermediário é uma marca da dedução natural. As fórmulas nas folhas de uma derivação em dedução natural são chamadas de hipóteses, e algumas das regras de inferência podem descarregá-las. Por exemplo, se temos uma derivação de ψ a partir de algumas hipóteses que incluem φ, então a regra $\to$Intro nos permite inferir $\varphi \to \psi$ e descartar qualquer hipótese da forma φ. (Para acompanhar quais hipóteses são descartadas em quais inferências, rotulamos a inferência e as hipóteses que ela descarta com um número.) As hipóteses que permanecem não descarregadas no final da derivação são, juntas, suficientes para a verdade da conclusão, de modo que uma derivação estabelece que suas hipóteses não descarregadas implicam sua conclusão.

A relação $\Gamma \vdash \varphi$ baseada na dedução natural vale se, e somente se, há uma derivação em que φ é a última sentença na árvore, e toda folha que está não descarregada está em Γ. φ é um teorema na dedução natural se, e somente se, há uma derivação em que φ é a última sentença e todas as hipóteses são descarregadas. Por exemplo, aqui está uma derivação que mostra que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi}\,{}^{1}\to\text{Intro}$$

O rótulo 1 indica que a hipótese $\varphi \wedge \psi$ é descarregada na inferência $\to$Intro.

Um conjunto Γ é inconsistente se, e somente se, $\Gamma \vdash \bot$ na dedução natural. A regra $\bot_I$ faz com que, a partir de um conjunto inconsistente, qualquer sentença possa ser derivada.

Sistemas de dedução natural foram desenvolvidos por Gerhard Gentzen e Stanisław Jaśkowski na década de 1930, e depois por Dag Prawitz e Frederic Fitch. Porque suas inferências espelham métodos naturais de prova, é favorecida por filósofos. As versões desenvolvidas por Fitch são frequentemente usadas em livros introdutórios de lógica. Na filosofia da lógica, as regras da dedução natural às vezes foram tomadas como dando os significados dos operadores lógicos ("semântica da Teoria da Prova").

5.4 Tableaux

fol:prf:tab:sec

Enquanto muitos sistemas de derivação operam com disposições de sentenças, os tableaux operam com fórmulas assinadas. A fórmula assinada é um par consistindo em um sinal de valor de verdade ($\mathbb{T}$ ou $\mathbb{F}$) e a sentença

$$\mathbb{T}\,\varphi \text{ ou } \mathbb{F}\,\varphi.$$

A tableau consiste em fórmulas assinadas dispostas em uma árvore ramificada para baixo. Começa com várias *hipóteses* e continua com fórmulas assinadas que resultam de uma das fórmulas assinadas acima dela pela aplicação de uma das regras de inferência. Cada regra nos permite adicionar uma ou mais fórmulas assinadas ao final de um ramo, ou duas fórmulas assinadas lado a lado—neste caso um ramo se divide em dois, com as duas fórmulas assinadas adicionadas formando os finais dos dois ramos.

Uma regra aplicada a uma fórmula assinada complexa resulta na adição de fórmulas assinadas que são sub-fórmulas imediatas. Elas vêm em pares, uma regra para cada um dos dois sinais. Por exemplo, a regra $\wedge\mathbb{T}$ se aplica a $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$, e permite a adição tanto das duas fórmulas assinadas $\mathbb{T}\,\varphi$ quanto de $\mathbb{T}\,\psi$ ao final de qualquer ramo que contém $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$, e a regra $\varphi \wedge \psi\mathbb{F}$ permite que um ramo seja dividido adicionando $\mathbb{F}\,\varphi$ e $\mathbb{F}\,\psi$ lado a lado. A tableau é fechado se cada um de seus ramos contém um par correspondente de fórmulas assinadas $\mathbb{T}\,\varphi$ e $\mathbb{F}\,\varphi$.

A relação $\vdash$ baseada em tableaux é definida da seguinte forma: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, há algum conjunto finito $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ tal que há um tableau fechado para as hipóteses

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

Por exemplo, aqui está um tableau fechado que mostra que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$:

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\psi$	$\to\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

Um conjunto Γ é inconsistente no cálculo de tableau se há um tableau fechado para hipóteses

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

para algum $\psi_i \in \Gamma$.

Os Tableaux foram inventados na década de 1950 independentemente por Evert Beth e Jaakko Hintikka, e simplificados e popularizados por Raymond Smullyan. São muito fáceis de usar, pois construir um tableau é um procedimento muito sistemático. Por causa da natureza sistemática dos tableaux, eles também se prestam à implementação por computador. No entanto, um tableau é frequentemente difícil de ler e sua conexão com provas às vezes não é fácil de ver. A abordagem também é bastante geral, e muitas lógicas diferentes têm sistemas de tableau. Os Tableaux também nos ajudam a encontrar estruturas que satisfazem sentenças (ou conjuntos de sentenças) dadas: se o conjunto é satisfatível, ele não terá um tableau fechado, isto é, qualquer tableau terá um ramo aberto. A estrutura satisfatória pode ser "lida" de um ramo aberto, desde que toda regra que seja possível aplicar tenha sido aplicada naquele ramo. Há também uma conexão muito estreita com o cálculo de sequentes: essencialmente, um tableau fechado é uma derivação condensada no cálculo de sequentes, escrita de cabeça para baixo.

5.5 Dedução Axiomática

fol:prf:axd:sec

As derivações axiomáticas são os sistemas de derivação lógicos mais antigos e mais simples. Suas derivações são simplesmente sequências de sentenças. Uma sequência de sentenças conta como uma derivação correta se toda sentença φ nela satisfaz uma das seguintes condições:

1. φ é um axioma, ou
2. φ é um membro de um dado conjunto Γ de sentenças, ou
3. φ é justificada por uma regra de inferência.

Para ser um axioma, φ tem que ter a forma de um entre vários esquemas fixos de sentença. Há muitos conjuntos de esquemas de axiomas que fornecem um sistema de derivação satisfatório (correto e completo) para a lógica de primeira ordem. Alguns são organizados de acordo com os conectivos que governam, por exemplo, os esquemas

$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \qquad \psi \to (\psi \vee \chi) \qquad (\psi \wedge \chi) \to \psi$$

são axiomas comuns que governam $\rightarrow$, $\vee$ e $\wedge$. Alguns sistemas de axiomas visam um número mínimo de axiomas. Dependendo dos conectivos tomados como primitivos, é até possível encontrar sistemas de axiomas que consistem em um único axioma.

Uma regra de inferência é uma afirmação condicional que dá uma condição suficiente para que uma sentença em uma derivação seja justificada. O modus ponens é uma regra muito comum desse tipo: diz que se φ e $\varphi \rightarrow \psi$ já estão justificados, então ψ está justificado. Isso significa que uma linha em uma derivação que contém a sentença ψ está justificada, desde que tanto φ quanto $\varphi \rightarrow \psi$ (para alguma sentença φ) apareçam na derivação antes de ψ.

A relação $\vdash$ baseada em derivações axiomáticas é definida da seguinte forma: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, há uma derivação com a sentença φ como sua última fórmula (e Γ é tomado como o conjunto de sentenças nessa derivação que são justificadas por (2) acima). φ é um teorema se φ tem uma derivação em que Γ é vazio, isto é, toda sentença na derivação é justificada por (1) ou (3). Por exemplo, aqui está uma derivação que mostra que $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi))$:

1. $\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$
2. $(\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)))$
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi))$

A sentença na linha 1 tem a forma do axioma $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ (com os papéis de φ e ψ invertidos). A sentença na linha 2 tem a forma do axioma $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$. Assim, ambas as linhas estão justificadas. A linha 3 é justificada por modus ponens: se a abreviarmos como θ, então a linha 2 tem a forma $\chi \rightarrow \theta$, onde χ é $\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$, isto é, a linha 1.

Um conjunto Γ é inconsistente se $\Gamma \vdash \bot$. Um sistema de axiomas completo também provará que $\bot \rightarrow \varphi$ para qualquer φ, e assim, se Γ é inconsistente, então $\Gamma \vdash \varphi$ para qualquer φ.

Sistemas de derivações axiomáticas para lógica foram dados pela primeira vez por Gottlob Frege em sua *Begriffsschrift* de 1879, que por essa razão é frequentemente considerada a primeira obra da lógica moderna. Foram aperfeiçoados em *Principia Mathematica* de Alfred North Whitehead e Bertrand Russell e por David Hilbert e seus alunos na década de 1920. São assim frequentemente chamados de "sistemas de Frege" ou "sistemas de Hilbert". São muito versáteis no sentido de que é frequentemente fácil encontrar um sistema axiomático para uma lógica. Porque as derivações têm uma estrutura muito simples e apenas uma ou duas regras de inferência, também é relativamente fácil provar coisas *sobre* eles. No entanto, são muito difíceis de usar na prática, isto é, é difícil encontrar e escrever provas.

Capítulo 6

O Cálculo de Sequentes

Este capítulo apresenta o cálculo de sequentes padrão LK de Gentzen para a lógica clássica de primeira ordem. Ele poderia ter mais exemplos e exercícios. Para incluir ou excluir material relevante ao cálculo de sequentes como sistema de prova, use a tag "prfLK".

6.1 Regras e Derivações

fol:seq:rul:sec

Para o que segue, sejam $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ representando sequências finitas de sentenças.

Definição 6.1 (Sequente). Um *sequente* é uma expressão da forma

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

em que Γ e Δ são sequências finitas (possivelmente vazias) de sentenças da linguagem $\mathcal{L}$. Γ é chamado de *antecedente*, enquanto Δ é o *sucedente*.

explanation

A ideia intuitiva por trás de um sequente é: se todas as sentenças no antecedente valem, então ao menos uma das sentenças no sucedente vale. Isto é, se $\Gamma = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle$ e $\Delta = \langle \psi_1, \ldots, \psi_n \rangle$, então $\Gamma \Rightarrow \Delta$ vale se, e somente se,

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) \to (\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n)$$

vale. Há dois casos especiais: quando Γ é vazio e quando Δ é vazio. Quando Γ é vazio, isto é, $m = 0$, $\Rightarrow \Delta$ vale se, e somente se, $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$ vale. Quando Δ é vazio, isto é, $n = 0$, $\Gamma \Rightarrow$ vale se, e somente se, $\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m)$ vale. Dizemos que um sequente é válido se, e somente se, a sentença correspondente é válida.

Se Γ é uma sequência de sentenças, escrevemos Γ, φ para o resultado de acrescentar φ à extremidade direita de Γ (e φ, Γ para o resultado de acrescentar φ à extremidade esquerda de Γ). Se Δ também é uma sequência de sentenças, então Γ, Δ é a concatenação das duas sequências.

Definição 6.2 (Sequente Inicial). Um *sequente inicial* é um sequente de uma das seguintes formas:

1. $\varphi \Rightarrow \varphi$
2. $\Rightarrow \top$
3. $\bot \Rightarrow$

para qualquer sentença φ na linguagem.

Derivações no cálculo de sequentes são certas árvores de sequentes, em que os sequentes no topo são sequentes iniciais e, se um sequente está abaixo de um ou dois outros sequentes, ele deve seguir corretamente por uma regra de inferência. As regras para **LK** dividem-se em dois tipos principais: regras *lógicas* e regras *estruturais*. As regras lógicas recebem o nome do operador principal da sentença que contém φ e/ou ψ no sequente inferior. Cada uma vem em duas versões, uma para inferir um sequente com a sentença que contém o operador lógico à esquerda, e uma com a sentença à direita.

6.2 Regras Proposicionais

fol:seq:prl:sec

Regras para $\neg$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

Regras para $\wedge$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

Regras para $\vee$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\vee\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

Regras para $\to$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \to\text{L} \qquad\qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \to\text{R}$$

6.3 Regras de Quantificadores

fol:seq:qrl:sec

Regras para $\forall$

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall\text{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)} \forall\text{R}$$

Em $\forall$L, t é um termo fechado (isto é, um termo sem variáveis). Em $\forall$R, a é a símbolo de constante que não pode ocorrer em lugar algum do sequente inferior da regra $\forall$R. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\forall$R.[1]

Regras para $\exists$

$$\frac{\varphi(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \exists\text{L} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)} \exists\text{R}$$

Novamente, t é um termo fechado, e a é a símbolo de constante que não ocorre no sequente inferior da regra $\exists$L. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\exists$L.

A condição de que uma variável própria não ocorra no sequente inferior da inferência $\forall$R ou $\exists$L é chamada de *condição de variável própria*.

Lembre-se da convenção de que, quando φ é a fórmula com a variável x livre, indicamos isso escrevendo $\varphi(x)$. No mesmo contexto, $\varphi(t)$ é então uma abreviação de $\varphi[t/x]$. Assim, poderíamos também escrever a regra $\exists$R como:

explanation

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi} \exists\text{R}$$

Note que t pode já ocorrer em φ, por exemplo, φ poderia ser $P(t, x)$. Assim, inferir $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, P(t, x)$ de $\Gamma \Rightarrow \Delta, P(t, t)$ é uma aplicação correta de $\exists$R—pode-se "substituir" uma ou mais, e não necessariamente todas, as ocorrências de t na premissa pela variável x ligada. Contudo, as condições de variável

[1] Usamos o termo "variável própria" embora a na regra acima seja a símbolo de constante. Isso tem razões históricas.

própria em ∀R e ∃L exigem que a símbolo de constante a não ocorra em φ. Portanto, não se pode inferir corretamente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, P(a, x)$ de $\Gamma \Rightarrow \Delta, P(a, a)$ usando ∀R.

explanation

Em ∃R e ∀L não há restrições sobre o termo t. Por outro lado, nas regras ∃L e ∀R, a condição de variável própria exige que a símbolo de constante a não ocorra em lugar algum fora de $\varphi(a)$ no sequente superior. Isso é necessário para garantir que o sistema seja correto, isto é, que só deriva sequentes que sejam válidos. Sem essa condição, o seguinte seria permitido:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}{\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)}\, {*\exists \mathrm{L}}}{\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)}\, \forall \mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}{\varphi(a) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)}\, {*\forall \mathrm{R}}}{\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)}\, \exists \mathrm{L}$$

Contudo, $\exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)$ não é válido.

6.4 Regras Estruturais

Precisamos também de algumas regras que nos permitam reorganizar sentenças nos lados esquerdo e direito de um sequente. Como as regras lógicas exigem que as sentenças na premissa sobre as quais a regra atua estejam ou na extremidade esquerda ou na extremidade direita, precisamos de uma regra de "troca" que nos permita mover sentenças para a posição correta. Às vezes também é importante poder combinar duas sentenças idênticas em uma só, e acrescentar a sentença em qualquer um dos lados.

fol:seq:srl:sec

Enfraquecimento

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, \mathrm{WL} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\, \mathrm{WR}$$

Contração

$$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, \mathrm{CL} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\, \mathrm{CR}$$

Troca

$$\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta}\, \mathrm{XL} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Lambda}\, \mathrm{XR}$$

Uma série de inferências de enfraquecimento, contração e troca será frequentemente indicada por linhas de inferência duplas.

A regra a seguir, chamada de "corte", não é estritamente necessária, mas torna muito mais fácil reutilizar e combinar derivações.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\text{Cut}$$

6.5 Derivações

fol:seq:der:sec

Já dissemos como é um sequente inicial e demos as regras de inferência. Derivações no cálculo de sequentes são geradas indutivamente a partir disso: cada derivação ou é um sequente inicial por si só, ou consiste em uma ou duas derivações seguidas de uma inferência. explanation

Definição 6.3 (LK-derivação). Uma **LK**-*derivação* de um sequente S é uma árvore finita de sequentes que satisfaz as seguintes condições:

1. Os sequentes no topo da árvore são sequentes iniciais.
2. O sequente na base da árvore é S.
3. Todo sequente na árvore exceto S é uma premissa de uma aplicação correta de uma regra de inferência cuja conclusão está diretamente abaixo daquele sequente na árvore.

Dizemos então que S é o *sequente final* da derivação e que S é *derivável em* **LK** (ou **LK**-derivável).

Exemplo 6.4. Todo sequente inicial, por exemplo, $\chi \Rightarrow \chi$, é a derivação. Podemos obter uma nova derivação a partir disso aplicando, digamos, a regra WL,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\text{WL}$$

A regra, contudo, deve ser geral: podemos substituir o φ na regra por qualquer sentença, por exemplo, também por θ. Se a premissa corresponde ao nosso sequente inicial $\chi \Rightarrow \chi$, isso significa que tanto Γ quanto Δ são apenas χ, e a conclusão seria então $\theta, \chi \Rightarrow \chi$. Assim, o seguinte é a derivação:

$$\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\text{WL}$$

Podemos agora aplicar outra regra, digamos XL, que nos permite trocar duas sentenças à esquerda. Assim, o seguinte também é uma derivação correta:

$$\dfrac{\dfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL}$$

Nesta aplicação da regra, que foi dada como

$$\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta,}\,\mathrm{XL}$$

tanto Γ quanto Π eram vazios, Δ é χ, e os papéis de φ e ψ são desempenhados por θ e χ, respectivamente. De modo muito semelhante, vemos também que

$$\dfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL}$$

é a derivação. Agora podemos pegar essas duas derivações e combiná-las usando $\wedge$R. Aquela regra era

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

No nosso caso, as premissas devem corresponder aos últimos sequentes das derivações que terminam nas premissas. Isso significa que Γ é χ, θ, Δ é vazio, φ é χ e ψ é θ. Assim, a conclusão, se a inferência for correta, é $\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL} \qquad \dfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta}\,\wedge\mathrm{R}$$

É claro que também podemos inverter as premissas; então φ seria θ e ψ seria χ.

$$\dfrac{\dfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL} \qquad \dfrac{\dfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi}\,\mathrm{XL}}{\chi, \theta \Rightarrow \theta \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

6.6 Exemplos de Derivações

fol:seq:pro:sec

Exemplo 6.5. Dê uma **LK**-derivação para o sequente $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

Começamos escrevendo o sequente final desejado na base da derivação.

$$\dfrac{}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}$$

Em seguida, precisamos descobrir que tipo de inferência poderia ter um sequente inferior dessa forma. Poderia ser uma regra estrutural, mas é uma boa ideia começar procurando uma regra lógica. O único conectivo lógico que ocorre no sequente inferior é $\wedge$, então procuramos uma regra de $\wedge$ e, como o símbolo $\wedge$ ocorre no antecedente, estamos diante da regra $\wedge$L.

$$\frac{}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L}$$

Há duas opções para o que poderia ter sido o sequente superior da inferência $\wedge$L: poderíamos ter um sequente superior $\varphi \Rightarrow \varphi$ ou $\psi \Rightarrow \varphi$. Claramente, $\varphi \Rightarrow \varphi$ é um sequente inicial (o que é bom), enquanto $\psi \Rightarrow \varphi$ não é derivável em geral. Preenchemos o sequente superior:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L}$$

Agora temos uma **LK**-derivação correta do sequente $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

Exemplo 6.6. Dê uma **LK**-derivação para o sequente $\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi$.

Comece escrevendo o sequente final desejado na base da derivação.

$$\frac{}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi}$$

Para encontrar uma regra lógica que pudesse nos dar esse sequente final, olhamos para os conectivos lógicos no sequente final: $\neg$, $\vee$ e $\to$. No momento, só nos importam $\vee$ e $\to$, porque são operadores principais de sentenças no sequente final, enquanto $\neg$ está dentro do escopo de outro conectivo, de modo que cuidaremos dele depois. Nossas opções de regras lógicas para a inferência final são, portanto, a regra $\vee$L e a regra $\to$R. Poderíamos escolher qualquer uma das regras, na verdade, mas vamos escolher a regra $\to$R (quando não fosse por outro motivo, porque ela nos permite adiar a divisão em dois ramos). De acordo com a forma das inferências $\to$R que podem produzir o sequente inferior, isto deve ser assim:

$$\frac{\dfrac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

Se movermos $\neg\varphi \vee \psi$ para a parte externa do antecedente, podemos aplicar a regra $\vee$L. De acordo com o esquema, isto deve se dividir em dois sequentes superiores como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \dfrac{}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\vee\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

Lembre-se de que estamos tentando subir até sequentes iniciais; parece que estamos bem perto! O ramo direito está a apenas um enfraquecimento e uma troca de um sequente inicial, e então estará pronto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{WL}}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{XL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,\vee\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi}\,\to\mathrm{R}$$

Agora, olhando para o ramo esquerdo, o único conectivo lógico em qualquer sentença é o símbolo $\neg$ nas sentenças do antecedente, então estamos diante de uma instância da regra $\neg$L.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}\neg\mathrm{L} \quad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\mathrm{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}\mathrm{XL}}{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}\mathrm{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi}\to\mathrm{R}}\vee\mathrm{L}$$

De modo semelhante a como finalizamos o ramo direito, estamos a apenas um enfraquecimento e uma troca de finalizar também este ramo esquerdo.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}\mathrm{WR}}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}\mathrm{XR}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}\neg\mathrm{L} \quad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\mathrm{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}\mathrm{XL}}{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}\mathrm{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \to \psi}\to\mathrm{R}}\vee\mathrm{L}$$

Exemplo 6.7. Dê uma **LK**-derivação do sequente $\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

Usando as técnicas acima, começamos escrevendo o sequente final desejado na base.

$$\dfrac{}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Os conectivos principais disponíveis das sentenças no sequente final são o símbolo $\vee$ e o símbolo $\neg$. Funcionaria aplicar aqui ou a regra $\vee$L ou a regra $\neg$R, mas começamos com a regra $\neg$R porque ela evita, por ora, a divisão em dois ramos:

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\neg\mathrm{R}$$

Agora temos a escolha de olhar para a regra $\wedge$L ou a regra $\vee$L. Vejamos o que acontece quando aplicamos a regra $\wedge$L: temos a escolha de começar com o sequente $\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow$ ou com o sequente $\psi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow$. Como a derivação é simétrica em relação a φ e ψ, vamos com o primeiro:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\wedge\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\neg\mathrm{R}$$

Continuando a preencher a derivação, vemos que esbarramos em um problema:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\neg\mathrm{L} \quad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \psi}?}{\neg\psi, \varphi \Rightarrow}\neg\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \Rightarrow}\vee\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\mathrm{XL}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\wedge\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\neg\mathrm{R}$$

O topo do ramo direito não pode ser reduzido mais, e ele não pode ser levado, por meio de inferências estruturais, a um sequente inicial, então este não é o caminho certo a tomar. Assim, claramente, foi um erro aplicar a regra $\wedge$L acima. Voltando ao que tínhamos antes e executando a regra $\vee$L em vez disso, obtemos

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \quad \dfrac{}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\vee\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\mathrm{XL}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\neg\mathrm{R}$$

Completando cada ramo como fizemos antes, obtemos

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\wedge\mathrm{L}}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\neg\mathrm{L} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \Rightarrow \psi}}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\wedge\mathrm{L}}{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\neg\mathrm{L}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}\vee\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}\mathrm{XL}}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}\neg\mathrm{R}$$

(Poderíamos ter executado as regras de $\wedge$ mais abaixo do que as regras de $\neg$ nesses passos e ainda assim obtido uma derivação correta).

Exemplo 6.8. Até agora não usamos a regra de contração, mas às vezes ela é necessária. Eis um exemplo em que isso acontece. Suponha que queiramos provar $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Aplicar $\vee$R de trás para frente nos daria uma destas duas derivações:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg\varphi}\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\vee\mathrm{R}$$

Nenhuma destas, é claro, termina em um sequente inicial. O truque é perceber que a regra de contração nos permite combinar duas cópias de a sentença em uma só—e quando estamos buscando uma prova, isto é, indo de baixo para cima, podemos manter uma cópia de $\varphi \vee \neg\varphi$ na premissa, por exemplo,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\mathrm{CR}$$

Agora podemos aplicar $\vee$R uma segunda vez, e também obter $\neg\varphi$, o que leva a uma derivação completa.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}\,\mathrm{XR}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{CR}$$

Problema 6.1. Dê derivações dos seguintes sequentes:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \to (\psi \to \chi) \Rightarrow \psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$.

Problema 6.2. Dê derivações dos seguintes sequentes:

1. $(\varphi \vee \psi) \to \chi \Rightarrow \varphi \to \chi$.
2. $(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \to \chi$.
3. $\Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\psi \to \varphi \Rightarrow \neg\varphi \to \neg\psi$.
5. $\Rightarrow (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
6. $\Rightarrow \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.
7. $\varphi \to \chi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg\chi \Rightarrow \neg(\varphi \to \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \Rightarrow \varphi$.
10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\Rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Problema 6.3. Dê derivações dos seguintes sequentes:

1. $\neg(\varphi \to \psi) \Rightarrow \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \to \psi \Rightarrow \neg\varphi \vee \psi$.

4. $\Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi$.
5. $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \Rightarrow \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \to \chi \Rightarrow (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$.
7. $(\varphi \to \psi) \to \varphi \Rightarrow \varphi$.
8. $\Rightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \chi)$.

(Todos esses requerem a regra CR.)

6.7 Derivações com Quantificadores

fol:seq:prq:sec

Exemplo 6.9. Dê uma **LK**-derivação do sequente $\exists x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x\, \varphi(x)$.

Ao lidar com quantificadores, temos de cuidar para não violar a condição de variável própria, e às vezes isso exige que brinquemos com a ordem de execução de certas inferências. Em geral, ajuda tentar cuidar primeiro das regras sujeitas à condição de variável própria (elas ficarão mais abaixo na prova finalizada). Além disso, é uma boa ideia tentar olhar adiante e adivinhar como o sequente inicial poderia ser. No nosso caso, ele terá de ser algo como $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$. Isso significa que, ao "reverter" as regras de quantificador, teremos de escolher o mesmo termo—que chamaremos de a—tanto para a regra $\forall$ quanto para a regra $\exists$. Se escolhêssemos termos diferentes para cada regra, acabaríamos com algo como $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(b)$, que, é claro, não é derivável.

Começando como de costume, escrevemos

$$\frac{}{\exists x\, \neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\, \varphi(x)}$$

Poderíamos executar a regra $\exists$L ou a regra $\neg$R. Como a regra $\exists$L está sujeita à condição de variável própria, é uma boa ideia cuidar dela mais cedo do que mais tarde, então faremos essa primeiro.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\, \varphi(x)}}{\exists x\, \neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\, \varphi(x)}\,\exists\text{L}$$

Aplicando as regras $\neg$L e $\neg$R de trás para frente, obtemos

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(a)}}{\neg\varphi(a), \forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow}\,\neg\text{L}}{\forall x\, \varphi(x), \neg\varphi(a) \;\Rightarrow}\,\text{XL}}{\neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\varphi(x)}\,\neg\text{R}}{\exists x\neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\forall x\varphi(x)}\,\exists\text{L}$$

Neste ponto, nossa única opção é executar a regra $\forall$L. Como essa regra não está sujeita à restrição de variável própria, estamos livres. Lembre-se, queremos tentar obter um sequente inicial (da forma $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$), então devemos escolher a como nosso argumento para φ ao aplicarmos a regra.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)}{\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)}\,\forall\mathrm{L}}{\neg\varphi(a), \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\forall x\, \varphi(x), \neg\varphi(a) \Rightarrow}\,\mathrm{XL}}{\neg\varphi(a) \Rightarrow \neg\forall x\, \varphi(x)}\,\neg\mathrm{R}}{\exists x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x\, \varphi(x)}\,\exists\mathrm{L}$$

É importante, especialmente ao lidar com quantificadores, verificar com cuidado neste ponto que a condição de variável própria não foi violada. Como a única regra que aplicamos sujeita à condição de variável própria foi $\exists$L, e a variável própria a não ocorre em seu sequente inferior (o sequente final), esta é uma derivação correta.

Problema 6.4. Dê derivações dos seguintes sequentes:

1. $\Rightarrow (\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall z\, (\varphi(z) \land \psi(z))$.
2. $\Rightarrow (\exists x\, \varphi(x) \lor \exists y\, \psi(y)) \to \exists z\, (\varphi(z) \lor \psi(z))$.
3. $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \Rightarrow \exists y\, \varphi(y) \to \psi$.
4. $\forall x\, \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\exists x\, \varphi(x)$.
5. $\Rightarrow \neg\exists x\, \varphi(x) \to \forall x\, \neg\varphi(x)$.
6. $\Rightarrow \neg\exists x\, \forall y\, ((\varphi(x, y) \to \neg\varphi(y, y)) \land (\neg\varphi(y, y) \to \varphi(x, y)))$.

Problema 6.5. Dê derivações dos seguintes sequentes:

1. $\Rightarrow \neg\forall x\, \varphi(x) \to \exists x\, \neg\varphi(x)$.
2. $(\forall x\, \varphi(x) \to \psi) \Rightarrow \exists y\, (\varphi(y) \to \psi)$.
3. $\Rightarrow \exists x\, (\varphi(x) \to \forall y\, \varphi(y))$.

(Todos esses requerem a regra CR.)

Esta seção reúne as definições da relação de demonstrabilidade e de consistência para a dedução natural.

6.8 Noções da Teoria da Prova

explanation

Assim como definimos uma série de noções semânticas importantes (validade, consequência, satisfatibilidade), definimos agora as *noções da teoria da prova* correspondentes. Elas não são definidas por apelo à satisfação de sentenças em estruturas, mas por apelo à derivabilidade ou à não derivabilidade de certos sequentes. Foi uma descoberta importante que essas noções coincidem. Que elas coincidem é o conteúdo dos teoremas da *correção* e da *completude*.

fol:seq:ptn:sec

Definição 6.10 (Teoremas). A sentença φ é um *teorema* se há a derivação em **LK** do sequente $\Rightarrow \varphi$. Escrevemos $\vdash \varphi$ se φ é um teorema e $\nvdash \varphi$ se não é.

Definição 6.11 (Derivabilidade). A sentença φ é *derivável de* um conjunto de sentenças Γ, $\Gamma \vdash \varphi$, se, e somente se, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e uma sequência Γ_0' das sentenças em Γ_0 tal que **LK** deriva $\Gamma_0' \Rightarrow \varphi$. Se φ não é derivável de Γ, escrevemos $\Gamma \nvdash \varphi$.

Por causa das regras de contração, enfraquecimento e troca, a ordem e o número de sentenças em Γ_0' não importam: se um sequente $\Gamma_0' \Rightarrow \varphi$ é derivável, então também o é $\Gamma_0'' \Rightarrow \varphi$ para qualquer Γ_0'' que contenha as mesmas sentenças que Γ_0'. Por exemplo, se $\Gamma_0 = \{\psi, \chi\}$, então tanto $\Gamma_0' = \langle \psi, \psi, \chi\rangle$ quanto $\Gamma_0'' = \langle \chi, \chi, \psi\rangle$ são sequências que contêm apenas as sentenças em Γ_0. Se um sequente contendo uma delas é derivável, o outro também é, por exemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi, \psi, \chi \Rightarrow \varphi}\,\text{CL}}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi}\,\text{XL}}{\chi, \psi \Rightarrow \varphi}\,\text{WL}$$

De agora em diante, diremos que, se Γ_0 é um conjunto finito de sentenças, então $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ é qualquer sequente em que o antecedente é uma sequência de sentenças em Γ_0, e incluiremos tacitamente contrações, trocas e enfraquecimentos se necessário.

Definição 6.12 (Consistência). Um conjunto de sentenças Γ é *inconsistente* se, e somente se, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que **LK** deriva $\Gamma_0 \Rightarrow$. Se Γ não é inconsistente, isto é, se para todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, **LK** não deriva $\Gamma_0 \Rightarrow$, dizemos que é *consistente*.

fol:seq:ptn: prop:reflexivity

Proposição 6.13 (Reflexividade). *Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.*

Prova. O sequente inicial $\varphi \Rightarrow \varphi$ é derivável, e $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$. □

fol:seq:ptn: prop:monotonicity

Proposição 6.14 (Monotonicidade). *Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Delta \vdash \varphi$.*

Prova. Suponha $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ é derivável. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, então Γ_0 também é um subconjunto finito de Δ. A derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ mostra, assim, também que $\Delta \vdash \varphi$. □

fol:seq:ptn: prop:transitivity

Proposição 6.15 (Transitividade). *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito e a derivação π_0 de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. Se $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então, para algum subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$, há a derivação π_1 de $\varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi$. Considere a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots\,\pi_0 & \vdots\,\pi_1 \\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi & \varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi\end{array}}{\Gamma_0, \Delta_0 \Rightarrow \psi}\,\text{Cut}$$

Como $\Gamma_0 \cup \Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta$, isso mostra $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. □

Note que isso significa, em particular, que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\varphi \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$. Segue-se também que se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi_i$ para cada i, então $\Gamma \vdash \psi$.

Proposição 6.16. *Γ é inconsistente se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$ para toda sentença φ.* *fol:seq:ptn: prop:incons*

Prova. Exercício. □

Problema 6.6. Prove Proposição 6.16

Proposição 6.17 (Compacidade). *fol:seq:ptn: prop:proves-compact*

1. *Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.*
2. *Se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então Γ é consistente.*

Prova. 1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que o sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ tem a derivação. Consequentemente, $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

2. Se Γ é inconsistente, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que **LK** deriva $\Gamma_0 \Rightarrow$. Mas então Γ_0 é um subconjunto finito de Γ que é inconsistente. □

6.9 Derivabilidade e Consistência

Estabeleceremos agora uma série de propriedades da relação de derivabilidade. Elas são interessantes por si mesmas, mas cada uma terá um papel na prova do teorema da completude. *fol:seq:prv: sec*

Proposição 6.18. *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente, então Γ é inconsistente.* *fol:seq:prv: prop:provability-contr*

Prova. Há Γ_0 e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finitos tais que **LK** deriva $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ e $\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$. Seja π_0 a **LK**-derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ e π_1 a **LK**-derivação de $\Gamma_1, \varphi \Rightarrow$. Podemos então derivar

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots\,\pi_0 & \vdots\,\pi_1\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi & \varphi, \Gamma_1 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow}\,\text{Cut}$$

Como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$; portanto, Γ é inconsistente. □

fol:seq:prv: prop:prov-incons

Proposição 6.19. *$\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.*

Prova. Primeiro, suponha $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há a derivação π_0 de $\Gamma \Rightarrow \varphi$. Acrescentando uma regra ¬L, obtemos a derivação de $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$, isto é, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.

Se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, há a derivação π_1 de $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$. O seguinte é a derivação de $\Gamma \Rightarrow \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\text{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \neg\varphi, \Gamma \Rightarrow\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,\text{Cut}$$

□

Problema 6.7. Prove que $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente.

fol:seq:prv: prop:explicit-inc

Proposição 6.20. *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$, então Γ é inconsistente.*

Prova. Suponha $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$. Então há a derivação π de um sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. O sequente $\neg\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ também é derivável:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots\,\pi & \dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\text{L}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\,\text{XL}\\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi & \end{array}}{\Gamma_0, \neg\varphi \Rightarrow}\,\text{Cut}$$

Como $\neg\varphi \in \Gamma$ e $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, isso mostra que Γ é inconsistente. □

fol:seq:prv: prop:provability-exhaustive

Proposição 6.21. *Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são ambos inconsistentes, então Γ é inconsistente.*

Prova. Há conjuntos finitos $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ e **LK**-derivações π_0 e π_1 de $\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ e $\neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$, respectivamente. Podemos então derivar

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_0\\ \varphi, \Gamma_0 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0 \Rightarrow \neg\varphi}\,\neg\text{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow}\,\text{Cut}$$

Como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Portanto, Γ é inconsistente. □

6.10 Derivabilidade e os Conectivos Proposicionais

explanation

Estabelecemos que a relação de derivabilidade $\vdash$ do cálculo de sequentes é forte o suficiente para estabelecer alguns fatos básicos envolvendo os conectivos proposicionais, tais como $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ e $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (modus ponens). Esses fatos são necessários para a prova do teorema da completude.

fol:seq:ppr:sec

Proposição 6.22.

fol:seq:ppr:prop:provability-land

1. *Tanto* $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ *quanto* $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.

fol:seq:ppr:prop:provability-land-left

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

fol:seq:ppr:prop:provability-land-right

Prova. 1. Ambos os sequentes $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ e $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ são deriváveis:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,\wedge\mathrm{L}$$

2. Eis a derivação do sequente $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathrm{R}$$

□

Proposição 6.23.

fol:seq:ppr:prop:provability-lor

1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ *é inconsistente.*

2. *Tanto* $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ *quanto* $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

Prova. 1. Damos a derivação do sequente $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow}}{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow}\,\vee\mathrm{L}$$

(Lembre-se de que linhas de inferência duplas indicam várias inferências de enfraquecimento, contração e troca.)

2. Ambos os sequentes $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ têm derivações:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\,\vee\mathrm{R}$$

□

Proposição 6.24.

fol:seq:ppr:prop:provability-lif

1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

fol:seq:ppr:prop:provability-lif-left

fol:seq:ppr: prop:provability-lif-right

2. *Tanto* $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ *quanto* $\psi \vdash \varphi \to \psi$.

Prova. 1. O sequente $\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi$ é derivável:

$$\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \to\text{L}$$

2. Ambos os sequentes $\neg\varphi \Rightarrow \varphi \to \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi \to \psi$ são deriváveis:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}\neg\text{L}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow}\text{XL}}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi}\text{WR}}{\neg\varphi \Rightarrow \varphi \to \psi} \to\text{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}\text{WL}}{\psi \Rightarrow \varphi \to \psi} \to\text{R}$$

□

6.11 Derivabilidade e os Quantificadores

fol:seq:qpr: sec

O teorema da completude também exige que as regras do cálculo de sequentes produzam os fatos sobre $\vdash$ estabelecidos nesta seção. explanation

fol:seq:qpr: thm:strong-generalization

Teorema 6.25. *Se c é uma constante que não ocorre em Γ ou $\varphi(x)$ e $\Gamma \vdash \varphi(c)$, então $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$.*

Prova. Seja π_0 uma **LK**-derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi(c)$ para algum $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito. Acrescentando uma inferência $\forall$R, obtemos a derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)$, já que c não ocorre em Γ ou $\varphi(x)$ e, assim, a condição de variável própria é satisfeita. □

fol:seq:qpr: prop:provability-quantifiers

Proposição 6.26.

1. $\varphi(t) \vdash \exists x\, \varphi(x)$.

2. $\forall x\, \varphi(x) \vdash \varphi(t)$.

Prova. 1. O sequente $\varphi(t) \Rightarrow \exists x\, \varphi(x)$ é derivável:

$$\dfrac{\varphi(t) \Rightarrow \varphi(t)}{\varphi(t) \Rightarrow \exists x\, \varphi(x)} \exists\text{R}$$

2. O sequente $\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$ é derivável:

$$\dfrac{\varphi(t) \Rightarrow \varphi(t)}{\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)} \forall\text{L}$$

□

6.12 Correção

explanation

Um sistema de derivação, tal como o cálculo de sequentes, é *correto* se não pode derivar coisas que de fato não valem. A correção é, assim, uma espécie de propriedade de segurança garantida para sistemas de derivação. Dependendo de qual propriedade da teoria da prova está em questão, gostaríamos de saber, por exemplo, que

fol:seq:sou:sec

1. todo φ derivável é válido;
2. se a sentença é derivável de algumas outras, ela também é consequência delas;
3. se um conjunto de sentenças é inconsistente, ele é insatisfatível.

Essas são propriedades importantes de um sistema de derivação. Se alguma delas não vale, o sistema de derivação é deficiente—ele deriva demais. Consequentemente, estabelecer a correção de um sistema de derivação é da máxima importância.

Como todas essas propriedades da teoria da prova são definidas via derivabilidade no cálculo de sequentes de certos sequentes, provar (1)–(3) acima requer provar algo sobre as propriedades semânticas dos sequentes deriváveis. Primeiro definiremos o que significa um sequente ser *válido*, e então mostraremos que todo sequente derivável é válido. (1)–(3) seguem-se então como corolários desse resultado.

Definição 6.27. A estrutura $\mathfrak{M}$ *satisfaz* um sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se, e somente se, ou $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ para algum $\varphi \in \Gamma$ ou $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para algum $\varphi \in \Delta$.

Um sequente é *válido* se, e somente se, toda estrutura $\mathfrak{M}$ o satisfaz.

Teorema 6.28 (Correção). *Se* **LK** *deriva* $\Theta \Rightarrow \Xi$*, então* $\Theta \Rightarrow \Xi$ *é válido.*

fol:seq:sou:thm:sequent-soundness

Prova. Seja π a derivação de $\Theta \Rightarrow \Xi$. Procedemos por indução sobre o número de inferências n em π.

Se o número de inferências é 0, então π consiste apenas em um sequente inicial. Todo sequente inicial $\varphi \Rightarrow \varphi$ é obviamente válido, pois para toda $\mathfrak{M}$, ou $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ ou $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.

Se o número de inferências é maior que 0, distinguimos casos de acordo com o tipo da inferência mais inferior. Pela hipótese de indução, podemos supor que as premissas dessa inferência são válidas, já que o número de inferências na derivação de qualquer premissa é menor que n.

Primeiro, consideramos as inferências possíveis com apenas uma premissa.

1. A última inferência é um enfraquecimento. Então $\Theta \Rightarrow \Xi$ é $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (se a última inferência é WL) ou $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (se é WR), e a derivação termina em uma de

$$\dfrac{\vdots}{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL}} \qquad \dfrac{\vdots}{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}}$$

Pela hipótese de indução, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido, isto é, para toda estrutura $\mathfrak{M}$, ou há algum $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ ou há algum $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \chi$.

Se $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, então $\chi \in \Theta$ também, já que $\Theta = \varphi, \Gamma$, e assim $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ para algum $\chi \in \Theta$. Analogamente, se $\mathfrak{M} \vDash \chi$ para algum $\chi \in \Delta$, como $\chi \in \Xi$, $\mathfrak{M} \vDash \chi$ para algum $\chi \in \Xi$. Consequentemente, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

2. A última inferência é ¬L: Então a premissa da última inferência é $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ e a conclusão é $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, isto é, a derivação termina em

$$\dfrac{\vdots}{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L}}$$

e $\Theta = \neg\varphi, \Gamma$ enquanto $\Xi = \Delta$.

A hipótese de indução nos diz que $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, isto é, para toda $\mathfrak{M}$, ou (a) para algum $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \nvDash \chi$, ou (b) para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \vDash \chi$, ou (c) $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Queremos mostrar que $\Theta \Rightarrow \Xi$ também é válido. Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura. Se (a) vale, então há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \chi$, mas $\chi \in \Theta$ também. Se (b) vale, há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \chi$, mas $\chi \in \Xi$ também. Por fim, se $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, então $\mathfrak{M} \nvDash \neg\varphi$. Como $\neg\varphi \in \Theta$, há $\chi \in \Theta$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \chi$. Consequentemente, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

3. A última inferência é ¬R: Exercício.

4. A última inferência é ∧L: Há duas variantes: $\varphi \wedge \psi$ pode ser inferido à esquerda a partir de φ ou de ψ no lado esquerdo da premissa. No primeiro caso, π termina em

$$\dfrac{\vdots}{\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\wedge\mathrm{L}}$$

e $\Theta = \varphi \wedge \psi, \Gamma$ enquanto $\Xi = \Delta$. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Como, pela hipótese de indução, $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido, (a) $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \wedge \psi$, então há $\chi \in \Theta$ (a saber, $\varphi \wedge \psi$) tal que $\mathfrak{M} \nvDash \chi$. No caso (b), há $\chi \in \Gamma$

tal que $\mathfrak{M} \nvDash \chi$, e $\chi \in \Theta$ também. No caso (c), há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \chi$, e $\chi \in \Xi$ também, já que $\Xi = \Delta$. Assim, em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido. O caso em que $\varphi \wedge \psi$ é inferido a partir de ψ é tratado da mesma forma, mudando φ para ψ.

5. A última inferência é $\vee$R: Há duas variantes: $\varphi \vee \psi$ pode ser inferido à direita a partir de φ ou de ψ no lado direito da premissa. No primeiro caso, π termina em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee\text{R}$$

   Agora $\Theta = \Gamma$ e $\Xi = \Delta, \varphi \vee \psi$. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, (a) $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), $\mathfrak{M} \vDash \varphi \vee \psi$. No caso (b), há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \chi$. No caso (c), há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \chi$. Assim, em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$, isto é, $\Theta \Rightarrow \Xi$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido. O caso em que $\varphi \vee \psi$ é inferido a partir de ψ é tratado da mesma forma, mudando φ para ψ.

6. A última inferência é $\rightarrow$R: Então π termina em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{R}$$

   Novamente, a hipótese de indução diz que a premissa é válida; queremos mostrar que a conclusão também é válida. Seja $\mathfrak{M}$ arbitrário. Como $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ é válido, ao menos um dos seguintes casos ocorre: (a) $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \vDash \psi$, (c) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (d) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. Nos casos (a) e (b), $\mathfrak{M} \vDash \varphi \rightarrow \psi$ e assim há um $\chi \in \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \chi$. No caso (c), para algum $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \nvDash \chi$. No caso (d), para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \vDash \chi$. Em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ é válido.

7. A última inferência é $\forall$L: Então há a fórmula $\varphi(x)$ e um termo fechado t tais que π termina em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall\text{L}$$

Queremos mostrar que a conclusão $\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válida. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Como a premissa $\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válida, (a) $\mathfrak{M} \nvDash \varphi(t)$, (b) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), por Proposição 3.31, se $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$, então $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$. Como $\mathfrak{M} \nvDash \varphi(t)$, $\mathfrak{M} \nvDash \forall x\, \varphi(x)$. Nos casos (b) e (c), $\mathfrak{M}$ também satisfaz $\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido.

8. A última inferência é $\exists$R: Exercício.

9. A última inferência é $\forall$R: Então há a fórmula $\varphi(x)$ e a símbolo de constante a tais que π termina em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\ \forall\text{R}$$

   em que a condição de variável própria é satisfeita, isto é, a não ocorre em $\varphi(x)$, Γ ou Δ. Pela hipótese de indução, a premissa da última inferência é válida. Temos de mostrar que a conclusão também é válida, isto é, que para qualquer estrutura $\mathfrak{M}$, (a) $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$, (b) $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \vDash \chi$ para algum $\chi \in \Delta$.

   Suponha que $\mathfrak{M}$ seja a estrutura arbitrária. Se (b) ou (c) vale, terminamos, então suponha que nenhuma vale: para todo $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \vDash \chi$, e para todo $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \nvDash \chi$. Temos de mostrar que (a) vale, isto é, $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$. Por Proposição 3.19, basta mostrar que $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$ para toda atribuição de variáveis s. Então seja s uma atribuição de variáveis arbitrária. Considere a estrutura $\mathfrak{M}'$ que é exatamente como $\mathfrak{M}$ exceto que $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$. Por Corolário 3.21, para qualquer $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M}' \vDash \chi$ já que a não ocorre em Γ, e para qualquer $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M}' \nvDash \chi$. Mas a premissa é válida, então $\mathfrak{M}' \vDash \varphi(a)$. Por Proposição 3.18, $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(a)$, já que $\varphi(a)$ é uma sentença. Agora $s \sim_x s$ com $s(x) = \mathrm{Val}_s^{\mathfrak{M}'}(a)$, já que definimos $\mathfrak{M}'$ exatamente desse modo. Assim Proposição 3.23 se aplica, e obtemos $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(x)$. Como a não ocorre em $\varphi(x)$, por Proposição 3.20, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$. Como s era arbitrário, completamos a prova de que $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$ para toda atribuição de variáveis.

10. A última inferência é $\exists$L: Exercício.

Agora consideremos as inferências possíveis com duas premissas.

1. A última inferência é um corte: então π termina em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ \text{Cut}$$

Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura. Pela hipótese de indução, as premissas são válidas, então $\mathfrak{M}$ satisfaz ambas as premissas. Distinguimos dois casos: (a) $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ e (b) $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. No caso (a), para que $\mathfrak{M}$ satisfaça a premissa esquerda, ela deve satisfazer $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Mas então também satisfaz a conclusão. No caso (b), para que $\mathfrak{M}$ satisfaça a premissa direita, ela deve satisfazer $\Pi \setminus \Lambda$. Novamente, $\mathfrak{M}$ satisfaz a conclusão.

2. A última inferência é $\wedge$R. Então π termina em

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi & \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge\text{R}$$

   Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Se $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta$, terminamos. Então suponha que não. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido pela hipótese de indução, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Analogamente, como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ é válido, $\mathfrak{M} \vDash \psi$. Mas então $\mathfrak{M} \vDash \varphi \wedge \psi$.

3. A última inferência é $\vee$L: Exercício.

4. A última inferência é $\rightarrow$L. Então π termina em

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi & \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \rightarrow\text{L}$$

   Novamente, considere a estrutura $\mathfrak{M}$ e suponha que $\mathfrak{M}$ não satisfaça $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$. Temos de mostrar que $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \rightarrow \psi$. Se $\mathfrak{M}$ não satisfaz $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$, não satisfaz nem $\Gamma \Rightarrow \Delta$ nem $\Pi \Rightarrow \Lambda$. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, temos $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Como $\psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ é válido, temos $\mathfrak{M} \nvDash \psi$. Mas então $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \rightarrow \psi$, que é o que queríamos mostrar. □

Problema 6.8. Complete a prova de Teorema 6.28.

Corolário 6.29. *Se $\vdash \varphi$, então φ é válido.*

fol:seq:sou: cor:weak-soundness

Corolário 6.30. *Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vDash \varphi$.*

fol:seq:sou: cor:entailment-soundness

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então, para algum subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, há a derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. Por Teorema 6.28, toda estrutura $\mathfrak{M}$ ou torna algum $\psi \in \Gamma_0$ falso ou torna φ verdadeiro. Logo, se $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, então também $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. □

Corolário 6.31. *Se Γ é satisfatível, então é consistente.*

fol:seq:sou: cor:consistency-soundness

Prova. Provamos a contrapositiva. Suponha que Γ não seja consistente. Então há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito e a derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow$. Por Teorema 6.28, $\Gamma_0 \Rightarrow$ é válido. Em outras palavras, para toda estrutura $\mathfrak{M}$, há $\chi \in \Gamma_0$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \chi$, e como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, esse χ também está em Γ. Assim, nenhuma $\mathfrak{M}$ satisfaz Γ, e Γ não é satisfatível. □

6.13 Derivações com Predicado de identidade

fol:seq:ide:sec

Derivações com predicado de identidade requerem sequentes iniciais e regras de inferência adicionais.

Definição 6.32 (Sequentes iniciais para =). Se t é um termo fechado, então $\Rightarrow t = t$ é um sequente inicial.

As regras para = são (t_1 e t_2 são termos fechados):

$$\frac{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)}{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)} = \qquad \frac{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)}{t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)} =$$

Exemplo 6.33. Se s e t são termos fechados, então $s = t, \varphi(s) \vdash \varphi(t)$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(s) \Rightarrow \varphi(s)}{s = t, \varphi(s) \Rightarrow \varphi(s)}\,\mathrm{WL}}{s = t, \varphi(s) \Rightarrow \varphi(t)}\,=$$

Isso pode ser familiar como o princípio da substitutibilidade de idênticos, ou Lei de Leibniz.

LK prova que = é simétrica e transitiva:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow t_1 = t_1}{t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_1}\,\mathrm{WL}}{t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1}\,= \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_2}{t_2 = t_3, t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_2}\,\mathrm{WL}}{t_2 = t_3, t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 = t_3}\,=}{t_1 = t_2, t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3}\,\mathrm{XL}$$

Na derivação à esquerda, a fórmula $x = t_1$ é o nosso $\varphi(x)$. À direita, tomamos $\varphi(x)$ como $t_1 = x$.

Problema 6.9. Dê derivações dos seguintes sequentes:

1. $\Rightarrow \forall x \forall y \left((x = y \wedge \varphi(x)) \rightarrow \varphi(y)\right)$
2. $\exists x\, \varphi(x) \wedge \forall y \forall z \left((\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \rightarrow y = z\right) \Rightarrow \exists x \left(\varphi(x) \wedge \forall y \left(\varphi(y) \rightarrow y = x\right)\right)$

6.14 Correção com Predicado de identidade

fol:seq:sid:sec

Proposição 6.34. LK *com sequentes iniciais e regras para a identidade é correto.*

Prova. Sequentes iniciais da forma $\Rightarrow t = t$ são válidos, pois para toda estrutura $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \vDash t = t$. (Note que supomos que o termo t seja fechado, isto é, que não contenha variáveis, de modo que atribuições de variáveis são irrelevantes).

Suponha que a última inferência em a derivação seja $=$. Então a premissa é $t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)$ e a conclusão é $t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)$. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que a conclusão é válida, isto é, se $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$ e $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, então ou $\mathfrak{M} \vDash \chi$ para algum $\chi \in \Delta$ ou $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_2)$.

Pela hipótese de indução, a premissa é válida. Isso significa que, se $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$ e $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, então ou (a) para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \vDash \chi$, ou (b) $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_1)$. No caso (a), terminamos. Considere o caso (b). Seja s uma atribuição de variáveis com $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1)$. Por Proposição 3.18, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_1)$. Como $s \sim_x s$, por Proposição 3.23, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$. Como $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$, temos $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$, e portanto $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Aplicando Proposição 3.23 novamente, temos também $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_2)$. Por Proposição 3.18, $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_2)$. □

Capítulo 7

Dedução Natural

Este capítulo apresenta um sistema de dedução natural no estilo de Gentzen/Prawitz.

Para incluir ou excluir material relevante à dedução natural como sistema de prova, use a tag "prfND".

7.1 Regras e Derivações

fol:ntd:rul:sec

Sistemas de dedução natural pretendem ser um paralelo próximo do raciocínio informal usado em provas matemáticas (daí serem, de certo modo, "naturais"). Provas em dedução natural começam com hipóteses. Em seguida, aplicam-se regras de inferência. As hipóteses são "descarregadas" pelas regras de inferência ¬Intro, →Intro, ∨Elim e ∃Elim, e o rótulo da hipótese descarregada é colocado ao lado da inferência para maior clareza.

explanation

Definição 7.1 (Hipótese). Uma *hipótese* é qualquer sentença na posição mais alta de qualquer ramo.

Derivações em dedução natural são certas árvores de sentenças, em que as sentenças no topo são hipóteses e, se a sentença está abaixo de um, dois ou três outros sequentes, ela deve seguir corretamente por uma regra de inferência. As sentenças no topo da inferência são chamadas de *premissas* e a sentença abaixo, de *conclusão* da inferência. As regras vêm em pares, uma regra de introdução e uma de eliminação para cada operador lógico. Elas introduzem a operador lógico na conclusão ou removem a operador lógico de uma premissa da regra. Algumas das regras permitem que uma hipótese de certo tipo seja *descarregada*. Para indicar qual hipótese é descarregada por qual inferência, também atribuímos rótulos tanto à hipótese quanto à inferência. Isso é indicado escrevendo-se a hipótese como "$[\varphi]^n$."

É costume considerar regras para todos os operadores lógicos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ e $\bot$, mesmo que alguns deles sejam definidos.

7.2 Regras Proposicionais

Regras para $\wedge$

fol:ntd:prl:sec

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge\text{Elim} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge\text{Elim}$$

Regras para $\vee$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}$$

$$n\ \frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^n \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^n \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\,\vee\text{Elim}$$

Regras para $\rightarrow$

$$n\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^n \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\,\rightarrow\text{Intro}$$

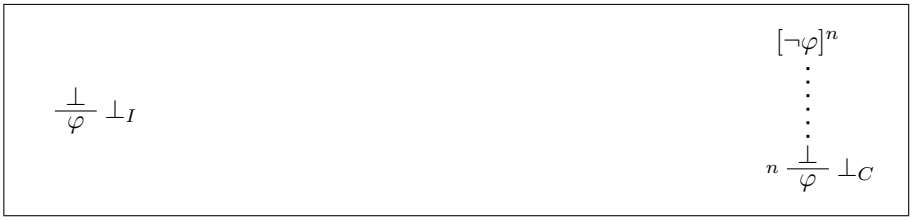
$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\,\rightarrow\text{Elim}$$

Regras para $\neg$

$$n\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^n \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,\neg\text{Intro}$$

$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\,\neg\text{Elim}$$

Regras para $\bot$



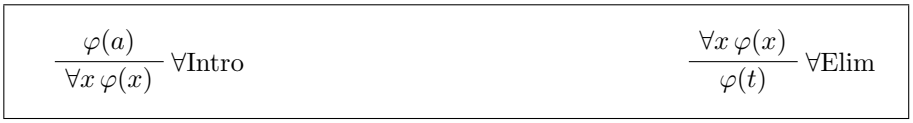
Note que $\neg$Intro e $\bot_C$ são muito semelhantes: a diferença é que $\neg$Intro deriva uma sentença negada $\neg\varphi$, mas $\bot_C$, uma sentença positiva φ.

Sempre que uma regra indica que alguma hipótese pode ser descarregada, nós tomamos isso como uma permissão, mas não uma exigência. Por exemplo, na regra $\to$Intro, podemos descarregar qualquer número de hipóteses da forma φ na derivação da premissa ψ, inclusive zero.

7.3 Regras de Quantificadores

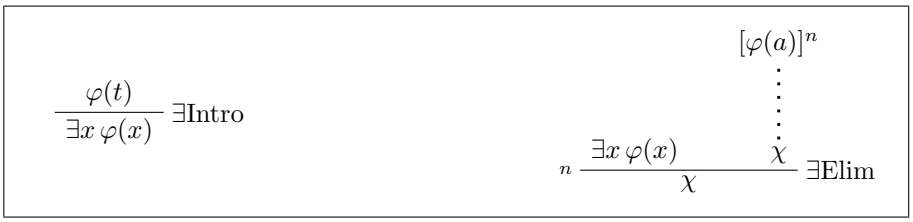
fol:ntd:qrl:sec

Regras para $\forall$



Nas regras para $\forall$, t é um termo fechado (um termo que não contém nenhuma variável), e a é a símbolo de constante que não ocorre na conclusão $\forall x\,\varphi(x)$, nem em qualquer hipótese que esteja não descarregada na derivação que termina com a premissa $\varphi(a)$. Chamamos a de *variável própria* da inferência $\forall$Intro.[1]

Regras para $\exists$



Novamente, t é um termo fechado, e a é a símbolo de constante que não ocorre na premissa $\exists x\,\varphi(x)$, na conclusão χ, nem em qualquer hipótese que esteja não

[1] Usamos o termo "variável própria" embora a na regra acima seja uma constante. Isso tem razões históricas.

descarregada nas derivações que terminam com as duas premissas (além das hipóteses $\varphi(a)$). Chamamos a de *variável própria* da inferência ∃Elim.

A condição de que uma variável própria não ocorra nem nas premissas nem em qualquer hipótese que esteja não descarregada nas derivações que levam às premissas para a inferência ∀Intro ou ∃Elim é chamada de *condição de variável própria*.

explanation Lembre-se da convenção de que, quando φ é a fórmula com a variável x livre, indicamos isso escrevendo $\varphi(x)$. No mesmo contexto, $\varphi(t)$ é então uma abreviação de $\varphi[t/x]$. Assim, poderíamos também escrever a regra ∃Intro como:

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\, \varphi}\,\exists\text{Intro}$$

Note que t pode já ocorrer em φ, por exemplo, φ poderia ser $P(t, x)$. Assim, inferir $\exists x\, P(t, x)$ de $P(t, t)$ é uma aplicação correta de ∃Intro—pode-se "substituir" uma ou mais, e não necessariamente todas, as ocorrências de t na premissa pela variável x ligada. Contudo, as condições de variável própria em ∀Intro e ∃Elim exigem que a símbolo de constante a não ocorra em φ. Portanto, não se pode inferir corretamente $\forall x\, P(a, x)$ de $P(a, a)$ usando ∀Intro.

explanation Em ∃Intro e ∀Elim não há restrições, e o termo t pode ser qualquer coisa, de modo que não temos de nos preocupar com nenhuma condição. Por outro lado, nas regras ∃Elim e ∀Intro, a condição de variável própria exige que a símbolo de constante a não ocorra em lugar algum na conclusão nem em uma hipótese não descarregada. A condição é necessária para garantir que o sistema seja correto, isto é, que só deriva sentenças de hipóteses não descarregadas das quais elas se seguem. Sem essa condição, o seguinte seria permitido:

$$\frac{\exists x\, \varphi(x) \qquad \dfrac{[\varphi(a)]^1}{\forall x\, \varphi(x)}\,{*}\forall\text{Intro}}{\forall x\, \varphi(x)}\,\exists\text{Elim}$$

Contudo, $\exists x\, \varphi(x) \not\models \forall x\, \varphi(x)$.

Como as regras de eliminação para quantificadores só permitem substituir variáveis por termos fechados, segue-se que qualquer fórmula que possa ser derivada de um conjunto de sentenças é ela própria a sentença.

7.4 Derivações

explanation Já dissemos o que é uma hipótese e demos as regras de inferência. Derivações em dedução natural são geradas indutivamente a partir disso: cada derivação ou é uma hipótese por si só, ou consiste em uma, duas ou três derivações seguidas de uma inferência correta. fol:ntd:der:sec

Definição 7.2 (Derivação). A *derivação* de a sentença φ a partir de hipóteses Γ é uma árvore finita de sentenças que satisfaz as seguintes condições:

1. As sentenças no topo da árvore ou estão em Γ ou são descarregadas por uma inferência na árvore.

2. A sentença na base da árvore é φ.

3. Toda sentença na árvore exceto a sentença φ na base é uma premissa de uma aplicação correta de uma regra de inferência cuja conclusão está diretamente abaixo daquela sentença na árvore.

Dizemos então que φ é a *conclusão* da derivação e Γ, suas hipóteses não descarregadas.

Se existe a derivação de φ a partir de Γ, dizemos que φ é *derivável* a partir de Γ, ou, em símbolos: $\Gamma \vdash \varphi$. Se há a derivação de φ em que toda hipótese é descarregada, escrevemos $\vdash \varphi$.

Exemplo 7.3. Toda hipótese por si só é a derivação. Assim, por exemplo, φ por si só é a derivação, e ψ por si só também. Podemos obter uma nova derivação a partir delas aplicando, digamos, a regra $\wedge$Intro,

$$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro}$$

Essas regras devem ser gerais: podemos substituir o φ e ψ nela por quaisquer sentenças, por exemplo, por χ e θ. Então a conclusão seria $\chi \wedge \theta$, e assim

$$\dfrac{\chi \qquad \theta}{\chi \wedge \theta}\,\wedge\text{Intro}$$

é uma derivação correta. É claro que também podemos trocar as hipóteses, de modo que θ desempenhe o papel de φ e χ o de ψ. Assim,

$$\dfrac{\theta \qquad \chi}{\theta \wedge \chi}\,\wedge\text{Intro}$$

também é uma derivação correta.

Podemos agora aplicar outra regra, digamos, $\to$Intro, que nos permite concluir um condicional e nos permite descarregar qualquer hipótese que seja idêntica ao antecedente desse condicional. Assim, ambas as seguintes seriam derivações corretas:

$$1\,\dfrac{\dfrac{[\chi]^1 \qquad \theta}{\chi \wedge \theta}\,\wedge\text{Intro}}{\chi \to (\chi \wedge \theta)}\,\to\text{Intro} \qquad 1\,\dfrac{\dfrac{\chi \qquad [\theta]^1}{\chi \wedge \theta}\,\wedge\text{Intro}}{\theta \to (\chi \wedge \theta)}\,\to\text{Intro}$$

Elas mostram, respectivamente, que $\theta \vdash \chi \to (\chi \wedge \theta)$ e $\chi \vdash \theta \to (\chi \wedge \theta)$.

Lembre-se de que descarregar hipóteses é uma permissão, não uma exigência: não temos de descarregar as hipóteses. Em particular, podemos aplicar uma regra mesmo que as hipóteses não estejam presentes na derivação. Por exemplo, o seguinte é válido, embora não haja hipótese φ a ser descarregada:

$$1\,\dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro}$$

7.5 Exemplos de Derivações

fol:ntd:pro:sec

Exemplo 7.4. Vamos dar a derivação da sentença $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$.

Começamos escrevendo a conclusão desejada na parte inferior da derivação.

$$\frac{}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi}$$

Em seguida, precisamos descobrir que tipo de inferência poderia resultar em a sentença desta forma. O operador principal da conclusão é $\to$, então tentaremos chegar à conclusão usando a regra $\to$Intro. O melhor é anotar as suposições envolvidas e rotular as regras de inferência conforme avançamos, para que seja fácil ver se todas as suposições foram descarregadas ao final da prova.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi \wedge \psi]^1 \\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi}\,{\scriptstyle 1}\ \to\text{Intro}$$

Agora precisamos preencher os passos da suposição $\varphi \wedge \psi$ até φ. Como só temos um conectivo com o qual lidar, $\wedge$, devemos usar a regra $\wedge$ elim. Isso nos dá a seguinte prova:

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \to \varphi}\,{\scriptstyle 1}\ \to\text{Intro}$$

Agora temos uma derivação correta de $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$.

Exemplo 7.5. Agora vamos dar a derivação de $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

Começamos escrevendo a conclusão desejada na parte inferior da derivação.

$$\frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}$$

Para encontrar uma regra lógica que possa nos dar esta conclusão, observamos os conectivos lógicos na conclusão: $\neg$, $\vee$ e $\to$. Por enquanto, só nos interessa a primeira ocorrência de $\to$, porque é o operador principal da sentença na conclusão, enquanto $\neg$, $\vee$ e a segunda ocorrência de $\to$ estão dentro do escopo de outro conectivo, então cuidaremos deles depois. Começamos, portanto, com a regra $\to$Intro. Uma aplicação correta deve ser assim:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi \vee \psi]^1 \\ \vdots \\ \varphi \to \psi\end{array}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\scriptstyle 1}\ \to\text{Intro}$$

Isso nos deixa com duas possibilidades para continuar. Podemos continuar trabalhando de baixo para cima e procurar outra aplicação da regra →Intro, ou podemos trabalhar de cima para baixo e aplicar a regra ∨Elim. Vamos adotar a segunda opção. Usaremos a suposição $\neg\varphi \vee \psi$ como a premissa mais à esquerda de ∨Elim. Para uma aplicação válida de ∨Elim, as outras duas premissas devem ser idênticas à conclusão $\varphi \to \psi$, mas cada uma pode ser derivada, por sua vez, de outra suposição, a saber, um dos dois disjuntos de $\neg\varphi \vee \psi$. Nossa derivação ficará, então, assim:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi]^2\\ \vdots\\ \varphi \to \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^2\\ \vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 2}\,\vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\scriptstyle 1}\,\to\text{Intro}$$

Em cada um dos dois ramos à direita, queremos derivar $\varphi \to \psi$, o que é melhor feito usando →Intro.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^2, [\varphi]^3\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 3}\,\to\text{Intro} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^2, [\varphi]^4\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 4}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 2}\,\vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\scriptstyle 1}\,\to\text{Intro}$$

Nas duas partes que faltam na derivação, precisamos de derivações de ψ a partir de $\neg\varphi$ e φ no meio, e a partir de φ e ψ à esquerda. Comecemos pelo primeiro caso. $\neg\varphi$ e φ são as duas premissas de ¬Elim:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}$$

Usando $\bot_I$, podemos obter ψ como conclusão e completar o ramo.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\,\bot\text{Intro}}{\psi}\,\bot_I}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 3}\,\to\text{Intro} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^2, [\varphi]^4\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 4}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 2}\,\vee\text{Elim}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\scriptstyle 1}\,\to\text{Intro}$$

Vejamos agora o ramo mais à direita. Aqui é importante perceber que a definição de derivação *permite que hipóteses sejam descarregadas* mas *não exige* que o sejam. Em outras palavras, se pudermos derivar ψ a partir de uma das suposições φ e ψ sem usar a outra, tudo bem. E para derivar ψ a partir de ψ é trivial: ψ por si só é tal a derivação, e nenhuma inferência é necessária. Portanto, podemos simplesmente eliminar a suposição φ.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi\vee\psi]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^2 \qquad [\varphi]^3}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\psi}\,\bot_I}{\varphi\to\psi}\,{}^3\!\to\text{Intro} \qquad \dfrac{[\psi]^2}{\varphi\to\psi}\,\to\text{Intro}}{\varphi\to\psi}\,{}^2\!\vee\text{Elim}}{(\neg\varphi\vee\psi)\to(\varphi\to\psi)}\,{}^1\!\to\text{Intro}$$

Observe que, na derivação concluída, a inferência $\to$Intro mais à direita na verdade não descarrega nenhuma hipótese.

Exemplo 7.6. Até agora não precisamos da regra $\bot_C$. Ela é especial porque nos permite descarregar uma hipótese que não é uma sub-fórmula da conclusão da regra. Está intimamente relacionada à regra $\bot_I$. Na verdade, a regra $\bot_I$ é um caso especial da regra $\bot_C$—existe uma lógica chamada "lógica intuicionista" na qual apenas $\bot_I$ é permitida. A regra $\bot_C$ é um último recurso quando nada mais funciona. Por exemplo, suponha que queiramos derivar $\varphi\vee\neg\varphi$. Nossa estratégia usual seria tentar derivar $\varphi\vee\neg\varphi$ usando $\vee$Intro. Mas isso exigiria derivar φ ou $\neg\varphi$ a partir de nenhuma suposição, e isso não pode ser feito. $\bot_C$ ao resgate!

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]^1\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi\vee\neg\varphi}\,{}^1\bot_C$$

Agora procuramos a derivação de $\bot$ a partir de $\neg(\varphi\vee\neg\varphi)$. Como $\bot$ é a conclusão de $\neg$Elim, podemos tentar isso:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]^1\\ \vdots\\ \neg\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg(\varphi\vee\neg\varphi)]^1\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\varphi\vee\neg\varphi}\,{}^1\bot_C$$

Nossa estratégia para encontrar a derivação de $\neg\varphi$ exige uma aplicação de $\neg$Intro:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1, [\varphi]^2}}{\vdots}}{\dfrac{\bot}{\neg\varphi}\,2\,\neg\text{Intro}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}}{\vdots}}{\varphi}}{\dfrac{\bot}{\varphi \vee \neg\varphi}\,1\,\bot_C}\,\neg\text{Elim}$$

Aqui, podemos obter $\bot$ facilmente aplicando $\neg$Elim à suposição $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ e a $\varphi \vee \neg\varphi$, que segue da nossa nova suposição φ por $\vee$Intro:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{[\varphi]^2}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\dfrac{\bot}{\neg\varphi}\,2\,\neg\text{Intro}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}}{\vdots}}{\varphi}}{\dfrac{\bot}{\varphi \vee \neg\varphi}\,1\,\bot_C}\,\neg\text{Elim}$$

No lado direito usamos a mesma estratégia, exceto que obtemos φ por $\bot_C$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{[\varphi]^2}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\dfrac{\bot}{\neg\varphi}\,2\,\neg\text{Intro}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{[\neg\varphi]^3}}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\text{Intro}}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\dfrac{\bot}{\varphi}\,3\,\bot_C}}{\dfrac{\bot}{\varphi \vee \neg\varphi}\,1\,\bot_C}\,\neg\text{Elim}$$

Problema 7.1. Dê derivações que mostrem o seguinte:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

Problema 7.2. Dê derivações que mostrem o seguinte:

1. $(\varphi \vee \psi) \to \chi \vdash \varphi \to \chi$.
2. $(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi$.
3. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\psi \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$.
5. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
6. $\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.

7. $\varphi \to \chi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.

8. $\varphi \wedge \neg\chi \vdash \neg(\varphi \to \chi)$.

9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$.

10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.

11. $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$.

12. $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Problema 7.3. Dê derivações que mostrem o seguinte:

1. $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi$.

2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$.

3. $\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$.

4. $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.

5. $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.

6. $(\varphi \wedge \psi) \to \chi \vdash (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$.

7. $(\varphi \to \psi) \to \varphi \vdash \varphi$.

8. $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \chi)$.

(Todos exigem a regra $\bot_C$.)

7.6 Derivações com Quantificadores

fol:ntd:prq:sec

Exemplo 7.7. Ao lidar com quantificadores, temos de cuidar para não violar a condição de variável própria, e às vezes isso exige que brinquemos com a ordem de execução de certas inferências. Em geral, ajuda tentar cuidar primeiro das regras sujeitas à condição de variável própria (elas ficarão mais abaixo na prova finalizada).

Vamos ver como daríamos a derivação de fórmula $\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)$. Começando como de costume, escrevemos

$$\frac{}{\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\forall x\, \varphi(x)}$$

Começamos escrevendo o que seria necessário para justificar esse último passo usando a regra →Intro.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\exists x\,\neg\varphi(x)]^1\\ \vdots\\ \neg\forall x\,\varphi(x)\end{array}}{\exists x\,\neg\varphi(x)\to\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 1}\,{\to}\text{Intro}}{}$$

Como não há uma regra óbvia para aplicar a $\neg\forall x\,\varphi(x)$, prosseguiremos montando a derivação de modo que possamos usar a regra $\exists$Elim. Aqui devemos prestar atenção à condição de variável própria e escolher uma constante que não apareça em $\exists x\,\varphi(x)$ nem em quaisquer suposições das quais ela dependa. (Como, no entanto, nenhum símbolo de constante aparece, qualquer escolha servirá.)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi(a)]^2\\ \vdots\\ \neg\forall x\,\varphi(x)\end{array}}{\exists x\,\neg\varphi(x)\to\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 1}\,{\to}\text{Intro}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 2}\,\exists\text{Elim}}{}$$

Para derivar $\neg\forall x\,\varphi(x)$, tentaremos usar a regra $\neg$Intro: isso exige que derivemos uma contradição, possivelmente usando $\forall x\,\varphi(x)$ como suposição adicional. É claro que essa contradição pode envolver a suposição $\neg\varphi(a)$, que será descarregada pela inferência $\exists$Elim. Podemos montá-la da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi(a)]^2,[\forall x\,\varphi(x)]^3\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 3}\,\neg\text{Intro}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 2}\,\exists\text{Elim}}{\exists x\,\neg\varphi(x)\to\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 1}\,{\to}\text{Intro}$$

Parece que estamos perto de obter uma contradição. A regra mais fácil de aplicar é a $\forall$Elim, que não possui condição de variável própria. Como podemos usar qualquer termo que queiramos para substituir o x universalmente quantificado, faz mais sentido continuar usando a para chegarmos a uma contradição.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi(a)]^2\quad\dfrac{[\forall x\,\varphi(x)]^3}{\varphi(a)}\,\forall\text{Elim}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 3}\,\neg\text{Intro}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 2}\,\exists\text{Elim}}{\exists x\,\neg\varphi(x)\to\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\scriptstyle 1}\,{\to}\text{Intro}$$

É importante, especialmente ao lidar com quantificadores, verificar com cuidado neste ponto que a condição de variável própria não foi violada. Como a única regra que aplicamos sujeita à condição de variável própria foi ∃Elim, e a variável própria a não ocorre em nenhuma suposição da qual dependa, esta é uma derivação correta.

Exemplo 7.8. Às vezes podemos derivar a fórmula a partir de outras fórmulas. Nesses casos, podemos ter suposições não descarregadas. É importante acompanhar nossas suposições, bem como o objetivo final.

Vamos ver como daríamos a derivação de fórmula $\exists x\, \chi(x, b)$ a partir das suposições $\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$ e $\forall x\, (\psi(x) \to \chi(x, b))$. Começando como de costume, escrevemos a conclusão na parte inferior.

$$\frac{}{\exists x\, \chi(x, b)}$$

Temos duas premissas com as quais trabalhar. Para usar a primeira, isto é, tentar encontrar a derivação de $\exists x\, \chi(x, b)$ a partir de $\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$, usaríamos a regra ∃Elim. Como ela possui condição de variável própria, aplicaremos essa regra primeiro. Obtemos o seguinte:

$$\dfrac{\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1 \\ \vdots \\ \exists x\, \chi(x, b)\end{array}}{\exists x\, \chi(x, b)}\, 1\ \exists\text{Elim}$$

As duas suposições com as quais estamos trabalhando compartilham ψ. Pode ser útil neste ponto aplicar ∧Elim para separar $\psi(a)$.

$$\dfrac{\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \qquad \begin{array}{c}\dfrac{[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1}{\psi(a)}\ \wedge\text{Elim} \\ \vdots \\ \exists x\, \chi(x, b)\end{array}}{\exists x\, \chi(x, b)}\, 1\ \exists\text{Elim}$$

A segunda suposição com a qual temos de trabalhar é $\forall x\, (\psi(x) \to \chi(x, b))$. Como não há condição de variável própria, podemos instanciar x com o símbolo de constante a usando ∀Elim para obter $\psi(a) \to \chi(a, b)$. Agora temos tanto $\psi(a) \to \chi(a, b)$ quanto $\psi(a)$. Nosso próximo passo deve ser uma aplicação direta da regra →Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(\psi(x) \to \chi(x,b))}{\psi(a) \to \chi(a,b)}\,\forall\text{Elim} \qquad \dfrac{[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1}{\psi(a)}\,\wedge\text{Elim}}{\chi(a,b)}\,\to\text{Elim}}{\vdots}$$

$$1\ \dfrac{\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \qquad \exists x\,\chi(x,b)}{\exists x\,\chi(x,b)}\,\exists\text{Elim}$$

Estamos quase lá! Uma aplicação de ∃Intro e atingimos nosso objetivo.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(\psi(x) \to \chi(x,b))}{\psi(a) \to \chi(a,b)}\,\forall\text{Elim} \qquad \dfrac{[\varphi(a) \wedge \psi(a)]^1}{\psi(a)}\,\wedge\text{Elim}}{\chi(a,b)}\,\to\text{Elim}}{\dfrac{\chi(a,b)}{\exists x\,\chi(x,b)}\,\exists\text{Intro}}$$

$$1\ \dfrac{\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \qquad \exists x\,\chi(x,b)}{\exists x\,\chi(x,b)}\,\exists\text{Elim}$$

Como garantimos em cada etapa que as condições de variável própria não foram violadas, podemos estar confiantes de que esta é uma derivação correta.

Exemplo 7.9. Dê a derivação de fórmula $\neg\forall x\,\varphi(x)$ a partir das suposições $\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ e $\neg\exists y\,\psi(y)$. Começando como de costume, escrevemos a fórmula alvo na parte inferior.

$$\dfrac{}{\neg\forall x\,\varphi(x)}$$

A última linha da derivação é uma negação, então vamos tentar usar ¬Intro. Isso exigirá que descubramos como derivar uma contradição.

$$1\ \dfrac{\dfrac{[\forall x\,\varphi(x)]^1}{\vdots}}{\dfrac{\bot}{\neg\forall x\,\varphi(x)}}\,\neg\text{Intro}$$

Até aqui, tudo bem. Podemos usar ∀Elim, mas não é óbvio se isso nos ajudará a alcançar nosso objetivo. Em vez disso, vamos usar uma de nossas suposições. $\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ junto com $\forall x\,\varphi(x)$ nos permitirá usar a regra →Elim.

$$1\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y) \qquad [\forall x\,\varphi(x)]^1}{\exists y\,\psi(y)}\,\to\text{Elim}}{\vdots}}{\dfrac{\bot}{\neg\forall x\,\varphi(x)}}\,\neg\text{Intro}$$

Agora temos uma suposição final com a qual trabalhar, e parece que isso nos ajudará a chegar a uma contradição usando ¬Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\exists y\,\psi(y) \qquad \dfrac{\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y) \qquad [\forall x\,\varphi(x)]^1}{\exists y\,\psi(y)}\,{\to}\text{Elim}}{\bot}\,{\neg}\text{Elim}}{\neg\forall x\,\varphi(x)}\,{\neg}\text{Intro}\;{}^{1}$$

Problema 7.4. Dê derivações que mostrem o seguinte:

1. $\vdash (\forall x\,\varphi(x) \land \forall y\,\psi(y)) \to \forall z\,(\varphi(z) \land \psi(z))$.
2. $\vdash (\exists x\,\varphi(x) \lor \exists y\,\psi(y)) \to \exists z\,(\varphi(z) \lor \psi(z))$.
3. $\forall x\,(\varphi(x) \to \psi) \vdash \exists y\,\varphi(y) \to \psi$.
4. $\forall x\,\neg\varphi(x) \vdash \neg\exists x\,\varphi(x)$.
5. $\vdash \neg\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\neg\varphi(x)$.
6. $\vdash \neg\exists x\,\forall y\,((\varphi(x,y) \to \neg\varphi(y,y)) \land (\neg\varphi(y,y) \to \varphi(x,y)))$.

Problema 7.5. Dê derivações que mostrem o seguinte:

1. $\vdash \neg\forall x\,\varphi(x) \to \exists x\,\neg\varphi(x)$.
2. $(\forall x\,\varphi(x) \to \psi) \vdash \exists y\,(\varphi(y) \to \psi)$.
3. $\vdash \exists x\,(\varphi(x) \to \forall y\,\varphi(y))$.

(Todas exigem a regra $\bot_C$.)

7.7 Noções da Teoria da Prova

fol:ntd:ptn:sec

Esta seção reúne as definições da relação de demonstrabilidade e de consistência para a dedução natural.

explanation Assim como definimos várias noções semânticas importantes (validade, consequência, satisfatibilidade), agora definimos noções *da Teoria da Prova* correspondentes. Elas não são definidas por apelo à satisfação de sentenças em estruturas, mas por apelo à derivabilidade ou não derivabilidade de certas sentenças a partir de outras. Foi uma descoberta importante que essas noções coincidem. Que coincidem é o conteúdo dos teoremas de *correção* e *completude*.

Definição 7.10 (Teoremas). Uma sentença φ é um *teorema* se há uma derivação de φ em dedução natural na qual todas as hipóteses são descarregadas. Escrevemos $\vdash \varphi$ se φ é um teorema e $\nvdash \varphi$ se não o é.

Definição 7.11 (Derivabilidade). A sentença φ é *derivável de* um conjunto de sentenças Γ, $\Gamma \vdash \varphi$, se há uma derivação com conclusão φ e na qual toda hipótese é ou descarregada ou está em Γ. Se φ não é derivável de Γ, escrevemos $\Gamma \nvdash \varphi$.

Definição 7.12 (Consistência). Um conjunto de sentenças Γ é *inconsistente* se, e somente se, $\Gamma \vdash \bot$. Se Γ não é inconsistente, isto é, se $\Gamma \nvdash \bot$, dizemos que é *consistente*.

fol:ntd:ptn: prop:reflexivity

Proposição 7.13 (Reflexividade). *Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.*

Prova. A hipótese φ por si só é uma derivação de φ em que toda hipótese não descarregada (isto é, φ) está em Γ. □

fol:ntd:ptn: prop:monotonicity

Proposição 7.14 (Monotonicidade). *Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Delta \vdash \varphi$.*

Prova. Qualquer derivação de φ a partir de Γ é também uma derivação de φ a partir de Δ. □

fol:ntd:ptn: prop:transitivity

Proposição 7.15 (Transitividade). *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, há uma derivação δ_0 de φ com todas as hipóteses não descarregadas em Γ. Se $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então há uma derivação δ_1 de ψ com todas as hipóteses não descarregadas em $\{\varphi\} \cup \Delta$. Considere agora:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\varphi]^1 \\ \vdots\,\delta_1 \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,{\scriptstyle 1}\,{\to}\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\,\delta_0 \\ \varphi\end{array}}{\psi}\,{\to}\text{Elim}$$

As hipóteses não descarregadas estão agora todas entre $\Gamma \cup \Delta$, de modo que isto mostra $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. □

Quando $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ é um conjunto finito, podemos usar a notação simplificada $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \vdash \psi$ para $\Gamma \vdash \psi$; em particular, $\varphi \vdash \psi$ significa que $\{\varphi\} \vdash \psi$.

Note que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\varphi \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$. Segue também que se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi_i$ para cada i, então $\Gamma \vdash \psi$.

fol:ntd:ptn: prop:incons

Proposição 7.16. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *Γ é inconsistente.*

2. *$\Gamma \vdash \varphi$ para toda sentença φ.*

3. *$\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ para alguma sentença φ.*

Prova. Exercício. □

Problema 7.6. Prove Proposição 7.16

Proposição 7.17 (Compacidade). *fol:ntd:ptn: prop:proves-compact*

1. *Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.*

2. *Se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então Γ é consistente.*

Prova. 1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há uma derivação δ de φ a partir de Γ. Seja Γ_0 o conjunto de hipóteses não descarregadas de δ. Como toda derivação é finita, Γ_0 só pode conter finitamente muitas sentenças. Assim, δ é uma derivação de φ a partir de um Γ_0 finito $\subseteq \Gamma$.

2. Isto é a contrapositiva de (1) no caso especial $\varphi \equiv \bot$. □

7.8 Derivabilidade e Consistência

Estabeleceremos agora várias propriedades da relação de derivabilidade. Elas são independentemente interessantes, mas cada uma desempenhará um papel na prova do teorema da completude. *fol:ntd:prv: sec*

Proposição 7.18. *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente, então Γ é inconsistente.* *fol:ntd:prv: prop:provability-contr*

Prova. Seja a derivação de φ a partir de Γ igual a δ_1 e a derivação de $\bot$ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ igual a δ_2. Podemos então derivar:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, [\varphi]^1 \quad \vdots\ \delta_2}{\bot}\,1}{\neg\varphi}\ \neg\text{Intro} \qquad \begin{matrix}\Gamma \\ \vdots\ \delta_1 \\ \varphi\end{matrix}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

Na nova derivação, a hipótese φ é descarregada, de modo que é uma derivação a partir de Γ. □

Proposição 7.19. *$\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.* *fol:ntd:prv: prop:prov-incons*

Prova. Primeiro suponha que $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há uma derivação δ_0 de φ a partir de hipóteses não descarregadas Γ. Obtemos uma derivação de $\bot$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ da seguinte forma:

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta_0\\ \varphi\end{array}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

Agora suponha que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, e seja δ_1 a derivação correspondente de $\bot$ a partir de hipóteses não descarregadas em $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Obtemos uma derivação de φ apenas a partir de Γ usando $\bot_C$:

$$\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\varphi]^1\\ \vdots\,\delta_1\\ \bot\end{array}\ \bot_C\ (1)$$

□

Problema 7.7. Prove que $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente.

fol:ntd:prv: prop:explicit-inc

Proposição 7.20. *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$, então Γ é inconsistente.*

Prova. Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$. Então há uma derivação δ de φ a partir de Γ. Considere esta aplicação simples da regra ¬Elim:

$$\dfrac{\neg\varphi \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\,\delta\\ \varphi\end{array}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

Como $\neg\varphi \in \Gamma$, todas as hipóteses não descarregadas estão em Γ; isto mostra que $\Gamma \vdash \bot$. □

fol:ntd:prv: prop:provability-exhaustive

Proposição 7.21. *Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são ambos inconsistentes, então Γ é inconsistente.*

Prova. Há derivações δ_1 e δ_2 de $\bot$ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e de $\bot$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, respectivamente. Podemos então derivar

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\varphi]^2\\ \vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\neg\neg\varphi}\ (2)\ \neg\text{Intro} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^1\\ \vdots\,\delta_1\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (1)\ \neg\text{Intro}}{\bot}\ \neg\text{Elim}$$

Como as hipóteses φ e $\neg\varphi$ são descarregadas, isto é uma derivação de $\bot$ apenas a partir de Γ. Logo Γ é inconsistente. □

7.9 Derivabilidade e os Conectivos Proposicionais

explanation

Estabelecemos que a relação de derivabilidade $\vdash$ da dedução natural é forte o suficiente para estabelecer alguns fatos básicos envolvendo os conectivos proposicionais, tais como $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ e $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (modus ponens). Esses fatos são necessários para a prova do teorema da completude.

fol:ntd:ppr:sec

Proposição 7.22.

fol:ntd:ppr:prop:provability-land

fol:ntd:ppr:prop:provability-land-left

fol:ntd:ppr:prop:provability-land-right

1. *Tanto* $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ *quanto* $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.
2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

Prova. 1. Podemos derivar ambos:

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge\text{Elim} \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge\text{Elim}$$

2. Podemos derivar:

$$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro}$$

□

Proposição 7.23.

fol:ntd:ppr:prop:provability-lor

1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ *é inconsistente.*
2. *Tanto* $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ *quanto* $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

Prova. 1. Considere a seguinte derivação:

$$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\neg\varphi \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,\neg\text{Elim} \qquad \dfrac{\neg\psi \qquad [\psi]^1}{\bot}\,\neg\text{Elim}}{\bot}\,{}^1\vee\text{Elim}$$

Esta é a derivação de $\bot$ a partir das hipóteses não descarregadas $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$ e $\neg\psi$.

2. Podemos derivar ambos:

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro} \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}$$

□

Proposição 7.24.

fol:ntd:ppr:prop:provability-lif

fol:ntd:ppr: prop:provability-lif-left

1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

fol:ntd:ppr: prop:provability-lif-right

2. *Tanto* $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ *quanto* $\psi \vdash \varphi \to \psi$.

Prova. 1. Podemos derivar:

$$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\,{\to}\text{Elim}$$

2. Isso é mostrado pelas duas derivações seguintes:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \qquad [\varphi]^1}{\dfrac{\bot}{\psi}\,\bot_I}\,\neg\text{Elim}}{1\ \dfrac{}{\varphi \to \psi}\,{\to}\text{Intro}} \qquad\qquad \dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\,{\to}\text{Intro}$$

Note que $\to$Intro pode, mas não precisa, descarregar a hipótese φ. □

7.10 Derivabilidade e os Quantificadores

fol:ntd:qpr: sec

O teorema da completude também requer que as regras de dedução natural produzam os fatos sobre $\vdash$ estabelecidos nesta seção. explanation

fol:ntd:qpr: thm:strong-generalization

Teorema 7.25. *Se c é uma constante que não ocorre em Γ ou $\varphi(x)$ e $\Gamma \vdash \varphi(c)$, então $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$.*

Prova. Seja δ uma derivação de $\varphi(c)$ a partir de Γ. Adicionando uma inferência $\forall$Intro, obtemos uma derivação de $\forall x\, \varphi(x)$. Como c não ocorre em Γ ou $\varphi(x)$, a condição de variável própria é satisfeita. □

fol:ntd:qpr: prop:provability-quantifiers

Proposição 7.26.

1. $\varphi(t) \vdash \exists x\, \varphi(x)$.
2. $\forall x\, \varphi(x) \vdash \varphi(t)$.

Prova. 1. A seguinte é uma derivação de $\exists x\, \varphi(x)$ a partir de $\varphi(t)$:

$$\dfrac{\varphi(t)}{\exists x\, \varphi(x)}\,\exists\text{Intro}$$

2. A seguinte é uma derivação de $\varphi(t)$ a partir de $\forall x\, \varphi(x)$:

$$\dfrac{\forall x\, \varphi(x)}{\varphi(t)}\,\forall\text{Elim}$$

□

7.11 Correção

explanation

Um sistema de derivação, como a dedução natural, é *correto* se não pode derivar coisas que de fato não seguem. A correção é assim uma espécie de propriedade de segurança garantida para sistemas de derivação. Dependendo de qual propriedade da Teoria da Prova está em questão, gostaríamos de saber, por exemplo, que

fol:ntd:sou:sec

1. toda sentença derivável é válida;
2. se uma sentença é derivável a partir de outras, ela também é uma consequência delas;
3. se um conjunto de sentenças é inconsistente, ele é insatisfatível.

Estas são propriedades importantes de um sistema de derivação. Se alguma delas não vale, o sistema de derivação é deficiente—ele deriva demais. Consequentemente, estabelecer a correção de um sistema de derivação é da maior importância.

Teorema 7.27 (Correção). *Se φ é derivável a partir das hipóteses não descarregadas Γ, então $\Gamma \vDash \varphi$.*

fol:ntd:sou:thm:soundness

Prova. Seja δ uma derivação de φ. Procedemos por indução no número de inferências em δ.

Para a base da indução, mostramos a afirmação quando o número de inferências é 0. Neste caso, δ consiste apenas de uma única sentença φ, isto é, uma hipótese. Essa hipótese é não descarregada, pois hipóteses só podem ser descarregadas por inferências, e não há inferências. Assim, qualquer estrutura $\mathfrak{M}$ que satisfaz todas as hipóteses não descarregadas da prova também satisfaz φ.

Agora o passo indutivo. Suponha que δ contém n inferências. A(s) premissa(s) da inferência mais baixa são derivadas usando sub-derivações, cada uma das quais contém menos de n inferências. Assumimos a hipótese de indução: as premissas da inferência mais baixa seguem das hipóteses não descarregadas das sub-derivações que terminam nessas premissas. Temos que mostrar que a conclusão φ segue das hipóteses não descarregadas de toda a prova.

Distinguimos casos de acordo com o tipo da inferência mais baixa. Primeiro, consideramos as possíveis inferências com apenas uma premissa.

1. Suponha que a última inferência é ¬Intro: a derivação tem a forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\, {}^{n}\neg\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, $\bot$ segue das hipóteses não descarregadas $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de δ_1. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, então $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$. Suponha por redução ao absurdo que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, mas $\mathfrak{M} \nvDash \neg\varphi$, isto é, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Isto significaria que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$. Isto é contrário à nossa hipótese de indução. Logo, $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi$.

2. A última inferência é $\wedge$Elim: há duas variantes: φ ou ψ pode ser inferido da premissa $\varphi \wedge \psi$. Considere o primeiro caso. A derivação δ tem este aspecto:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\,\delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}$$

   Pela hipótese de indução, $\varphi \wedge \psi$ segue das hipóteses não descarregadas Γ de δ_1. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, então $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Suponha $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$. Pela nossa hipótese de indução ($\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$), sabemos que $\mathfrak{M} \vDash \varphi \wedge \psi$. Por definição, $\mathfrak{M} \vDash \varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ e $\mathfrak{M} \vDash \psi$. (O caso em que ψ é inferido de $\varphi \wedge \psi$ é tratado de forma similar.)

3. A última inferência é $\vee$Intro: há duas variantes: $\varphi \vee \psi$ pode ser inferido da premissa φ ou da premissa ψ. Considere o primeiro caso. A derivação tem a forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\,\delta_1 \\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}$$

   Pela hipótese de indução, φ segue das hipóteses não descarregadas Γ de δ_1. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, então $\mathfrak{M} \vDash \varphi \vee \psi$. Suponha $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$; então $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, pois $\Gamma \vDash \varphi$ (a hipótese de indução). Logo também deve ser o caso que $\mathfrak{M} \vDash \varphi \vee \psi$. (O caso em que $\varphi \vee \psi$ é inferido de ψ é tratado de forma similar.)

4. A última inferência é $\rightarrow$Intro: $\varphi \rightarrow \psi$ é inferido de uma subprova com hipótese φ e conclusão ψ, isto é,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots\,\delta_1 \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\,{}^{n}\,\rightarrow\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, ψ segue das hipóteses não descarregadas de δ_1, isto é, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. As hipóteses não descarregadas de δ são apenas Γ, pois φ é descartada na última inferência. Precisamos mostrar que $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Por redução ao absurdo, suponha que para alguma estrutura $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ mas $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \to \psi$. Assim, $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ e $\mathfrak{M} \nvDash \psi$. Mas por hipótese, ψ é uma consequência de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, isto é, $\mathfrak{M} \vDash \psi$, o que é uma contradição. Logo, $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

5. A última inferência é $\bot_I$: aqui, δ termina em

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\,\delta_1 \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\,\bot_I$$

Pela hipótese de indução, $\Gamma \vDash \bot$. Temos que mostrar que $\Gamma \vDash \varphi$. Suponha o contrário; então para algum $\mathfrak{M}$ temos $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ e $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. Mas sempre temos $\mathfrak{M} \nvDash \bot$, de modo que isto significaria que $\Gamma \nvDash \bot$, contrariando a hipótese de indução.

6. A última inferência é $\bot_C$: Exercício.

7. A última inferência é $\forall$Intro: então δ tem a forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots\,\delta_1 \\ \vdots \\ \varphi(a)\end{array}}{\forall x\, \varphi(x)}\,\forall\text{Intro}$$

A premissa $\varphi(a)$ é consequência das hipóteses não descarregadas Γ pela hipótese de indução. Considere alguma estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$. Precisamos mostrar que $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$. Como $\forall x\, \varphi(x)$ é a sentença, isto significa que temos que mostrar que para toda atribuição de variáveis s, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$ (Proposição 3.19). Como Γ consiste inteiramente em sentenças, $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$ por Definição 3.11. Seja $\mathfrak{M}'$ como $\mathfrak{M}$, exceto que $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$. Como a não ocorre em Γ, $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma$ por Corolário 3.21. Como $\Gamma \vDash \varphi(a)$, $\mathfrak{M}' \vDash \varphi(a)$. Como $\varphi(a)$ é a sentença, $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(a)$ por Proposição 3.18. $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(x)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}' \vDash \varphi(a)$ por Proposição 3.23 (lembre que $\varphi(a)$ é apenas $\varphi(x)[a/x]$). Assim, $\mathfrak{M}', s \vDash \varphi(x)$. Como a não ocorre em $\varphi(x)$, por Proposição 3.20, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$. Mas s foi uma atribuição de variáveis arbitrária, de modo que $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \varphi(x)$.

8. A última inferência é $\exists$Intro: Exercício.

9. A última inferência é $\forall$Elim: Exercício.

Agora consideremos as possíveis inferências com várias premissas: $\vee$Elim, $\wedge$Intro, $\to$Elim, e $\exists$Elim.

1. A última inferência é $\wedge$Intro. $\varphi \wedge \psi$ é inferido das premissas φ e ψ e δ tem a forma

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \vdots & \vdots \\ \delta_1 & \delta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi & \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge\text{Intro}$$

   Pela hipótese de indução, φ segue das hipóteses não descarregadas Γ_1 de δ_1 e ψ segue das hipóteses não descarregadas Γ_2 de δ_2. As hipóteses não descarregadas de δ são $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, de modo que temos que mostrar que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vDash \varphi \wedge \psi$. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Como $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1$, deve ser o caso que $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, pois $\Gamma_1 \vDash \varphi$, e como $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_2$, $\mathfrak{M} \vDash \psi$, pois $\Gamma_2 \vDash \psi$. Juntas, $\mathfrak{M} \vDash \varphi \wedge \psi$.

2. A última inferência é $\vee$Elim: Exercício.

3. A última inferência é $\to$Elim. ψ é inferido das premissas $\varphi \to \psi$ e φ. A derivação δ tem este aspecto:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \vdots & \vdots \\ \delta_1 & \delta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi \to \psi & \varphi\end{array}}{\psi}\ \to\text{Elim}$$

   Pela hipótese de indução, $\varphi \to \psi$ segue das hipóteses não descarregadas Γ_1 de δ_1 e φ segue das hipóteses não descarregadas Γ_2 de δ_2. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que, se $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, então $\mathfrak{M} \vDash \psi$. Suponha $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Como $\Gamma_1 \vDash \varphi \to \psi$, $\mathfrak{M} \vDash \varphi \to \psi$. Como $\Gamma_2 \vDash \varphi$, temos $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. Isto significa que $\mathfrak{M} \vDash \psi$ (pois se $\mathfrak{M} \nvDash \psi$, como $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, teríamos $\mathfrak{M} \nvDash \varphi \to \psi$, contradizendo $\mathfrak{M} \vDash \varphi \to \psi$).

4. A última inferência é $\neg$Elim: Exercício.

5. A última inferência é $\exists$Elim: Exercício. □

Problema 7.8. Complete a prova de Teorema 7.27.

fol:ntd:sou: cor:weak-soundness

Corolário 7.28. *Se $\vdash \varphi$, então φ é válida.*

fol:ntd:sou: cor:consistency-soundness

Corolário 7.29. *Se Γ é satisfatível, então é consistente.*

Prova. Provamos a contrapositiva. Suponha que Γ não é consistente. Então $\Gamma \vdash \bot$, isto é, há uma derivação de $\bot$ a partir de hipóteses não descarregadas em Γ. Por Teorema 7.27, qualquer estrutura $\mathfrak{M}$ que satisfaz Γ deve satisfazer $\bot$. Como $\mathfrak{M} \not\models \bot$ para toda estrutura $\mathfrak{M}$, nenhuma $\mathfrak{M}$ pode satisfazer Γ, isto é, Γ não é satisfatível. □

7.12 Derivações com Predicado de identidade

As Derivações com predicado de identidade requerem regras de inferência adicionais. fol:ntd:ide:sec

$$\frac{}{t = t}\,{=}\text{Intro} \qquad \frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi(t_1)}{\varphi(t_2)}\,{=}\text{Elim} \qquad \frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi(t_2)}{\varphi(t_1)}\,{=}\text{Elim}$$

Nas regras acima, t, t_1 e t_2 são termos fechados. A regra =Intro nos permite derivar qualquer afirmação de identidade da forma $t = t$ diretamente, sem hipóteses.

Exemplo 7.30. Se s e t são termos fechados, então $\varphi(s), s = t \vdash \varphi(t)$:

$$\frac{s = t \qquad \varphi(s)}{\varphi(t)}\,{=}\text{Elim}$$

Isto pode ser familiar como o "princípio da substituibilidade dos identicos", ou Lei de Leibniz.

Problema 7.9. Prove que $=$ é simétrica e transitiva, isto é, dê derivações de $\forall x \forall y\,(x = y \to y = x)$ e $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)$

Exemplo 7.31. Derivamos a sentença

$$\forall x \forall y\,((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \to x = y)$$

a partir da sentença

$$\exists x \forall y\,(\varphi(y) \to y = x)$$

Desenvolvemos a derivação de trás para frente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x \forall y\,(\varphi(y) \to y = x) \quad [\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1}{\vdots}}{a = b}}{\dfrac{\dfrac{1\ \dfrac{}{((\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \to a = b)}\,{\to}\text{Intro}}{\forall y\,((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \to a = y)}\,\forall\text{Intro}}{\forall x \forall y\,((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \to x = y)}\,\forall\text{Intro}}$$

Agora teremos que usar a hipótese principal: como é uma fórmula existencial, usamos ∃Elim para derivar a conclusão intermediária $a = b$.

$$\dfrac{\exists x\, \forall y\, (\varphi(y) \to y = x) \qquad \begin{array}{c}[\forall y\, (\varphi(y) \to y = c)]^2 \\ [\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1 \\ \vdots \\ a = b\end{array}}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a = b}{((\varphi(a) \wedge \varphi(b)) \to a = b)}\,{\scriptstyle 1}\,\to\text{Intro}}{\forall y\, ((\varphi(a) \wedge \varphi(y)) \to a = y)}\,\forall\text{Intro}}{\forall x\, \forall y\, ((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \to x = y)}\,\forall\text{Intro}}\,{\scriptstyle 2}\,\exists\text{Elim}$$

A sub-derivação no canto superior direito é completada usando suas hipóteses para mostrar que $a = c$ e $b = c$. Isso requer duas derivações separadas. A derivação para $a = c$ é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{[\forall y\, (\varphi(y) \to y = c)]^2}{\varphi(a) \to a = c}\,\forall\text{Elim} \qquad \dfrac{[\varphi(a) \wedge \varphi(b)]^1}{\varphi(a)}\,\wedge\text{Elim}}{a = c}\,\to\text{Elim}$$

De $a = c$ e $b = c$ derivamos $a = b$ por =Elim.

Problema 7.10. Dê derivações das seguintes fórmulas:

1. $\forall x\, \forall y\, ((x = y \wedge \varphi(x)) \to \varphi(y))$
2. $\exists x\, \varphi(x) \wedge \forall y\, \forall z\, ((\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \to y = z) \to \exists x\, (\varphi(x) \wedge \forall y\, (\varphi(y) \to y = x))$

7.13 Correção com Predicado de identidade

fol:ntd:sid:sec

Proposição 7.32. *A dedução natural com regras para = é correta.*

Prova. Qualquer fórmula da forma $t = t$ é válida, pois para toda estrutura $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \vDash t = t$. (Note que assumimos que o termo t é fechado, isto é, não contém variáveis, de modo que as atribuições de variáveis são irrelevantes).

Suponha que a última inferência em uma derivação é =Elim, isto é, a derivação tem a seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \\ \vdots\,\delta_1 \\ t_1 = t_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2 \\ \vdots\,\delta_2 \\ \varphi(t_1)\end{array}}{\varphi(t_2)}\,=\text{Elim}$$

As premissas $t_1 = t_2$ e $\varphi(t_1)$ são derivadas a partir de hipóteses não descarregadas Γ_1 e Γ_2, respectivamente. Queremos mostrar que $\varphi(t_2)$ segue de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Considere uma estrutura $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_1)$ e $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$. Portanto, $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Seja s qualquer atribuição de variáveis e $m = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Por Proposição 3.23, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_1)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s[m/x] \vDash \varphi(x)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_2)$. Como $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_1)$, temos $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_2)$. □

Capítulo 8

Tableaux

This chapter presents a signed analytic tableaux system.
To include or exclude material relevant to natural deduction as a proof system, use the "prfTab" tag.

-NoValue-

8.1 Rules and Tableaux

fol:tab:rul:sec

A tableau is a systematic survey of the possible ways a sentença can be true or false in a estrutura. The building blocks of a tableau are fórmulas assinadas: sentenças plus a truth value "sign," either $\mathbb{T}$ or $\mathbb{F}$. These signed fórmulas are arranged in a (downward growing) tree.

Definição 8.1. A *fórmula assinada* is a pair consisting of a truth value and a sentença, O.s., either:

$$\mathbb{T}\,\varphi \text{ or } \mathbb{F}\,\varphi.$$

Intuitively, we might read $\mathbb{T}\,\varphi$ as "φ might be true" and $\mathbb{F}\,\varphi$ as "φ might be false" (in some estrutura).

Each fórmula assinada in the tree is either an *assumption* (which are listed at the very top of the tree), or it is obtained from a fórmula assinada above it by one of a number of rules of inference. There are two rules for each possible operador principal of the preceding fórmula, one for the case where the sign is $\mathbb{T}$, and one for the case where the sign is $\mathbb{F}$. Some rules allow the tree to branch, and some only add fórmulas assinadas to the branch. A rule may be (and often must be) applied not to the immediately preceding fórmula assinada, but to any fórmula assinada in the branch from the root to the place the rule is applied.

A branch is *closed* when it contains both $\mathbb{T}\,\varphi$ and $\mathbb{F}\,\varphi$. A closed tableau is one where every branch is closed. Under the intuitive interpretation, any

branch describes a joint possibility, but $\mathbb{T}\,\varphi$ and $\mathbb{F}\,\varphi$ are not jointly possible. In other words, if a branch is closed, the possibility it describes has been ruled out. In particular, that means that a closed tableau rules out all possibilities of simultaneously making every assumption of the form $\mathbb{T}\,\varphi$ true and every assumption of the form $\mathbb{F}\,\varphi$ false.

A closed tableau *for* φ is a closed tableau with root $\mathbb{F}\,\varphi$. If such a closed tableau exists, all possibilities for φ being false have been ruled out; O.s., φ must be true in every estrutura.

-NoValue-

8.2 Propositional Rules

Rules for $\neg$

fol:tab:prl:sec

$$\frac{\mathbb{T}\,\neg\varphi}{\mathbb{F}\,\varphi}\,\neg\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\neg\varphi}{\mathbb{T}\,\varphi}\,\neg\mathbb{F}$$

Rules for $\wedge$

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,\varphi\\ \mathbb{T}\,\psi\end{array}}\,\wedge\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi \wedge \psi}{\mathbb{F}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{F}\,\psi}\,\wedge\mathbb{F}$$

Rules for $\vee$

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi}{\mathbb{T}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\,\psi}\,\vee\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi}{\begin{array}{c}\mathbb{F}\,\varphi\\ \mathbb{F}\,\psi\end{array}}\,\vee\mathbb{F}$$

Rules for $\rightarrow$

$$\frac{\mathbb{T}\,\varphi \rightarrow \psi}{\mathbb{F}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\,\psi}\,\rightarrow\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\varphi \rightarrow \psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\,\varphi\\ \mathbb{F}\,\psi\end{array}}\,\rightarrow\mathbb{F}$$

The Cut Rule

$$\frac{}{\mathbb{T}\,\varphi \quad | \quad \mathbb{F}\,\varphi}\ \text{Cut}$$

The Cut rule is not applied "to" a previous fórmula assinada; rather, it allows every branch in a tableau to be split in two, one branch containing $\mathbb{T}\,\varphi$, the other $\mathbb{F}\,\varphi$. It is not necessary—any set of fórmulas assinadas with a closed tableau has one not using Cut—but it allows us to combine tableaux in a convenient way.

-NoValue-

8.3 Quantifier Rules

fol:tab:qrl:sec

Rules for $\forall$

$$\frac{\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\,\varphi(t)}\ \forall\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\,\varphi(a)}\ \forall\mathbb{F}$$

In $\forall\mathbb{T}$, t is a closed term (O.s., one without variables). In $\forall\mathbb{F}$, a is a símbolo de constante which must not occur anywhere in the branch above $\forall\mathbb{F}$ rule. We call a the *eigenvariable* of the $\forall\mathbb{F}$ inference.[1]

Rules for $\exists$

$$\frac{\mathbb{T}\,\exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\,\varphi(a)}\ \exists\mathbb{T} \qquad\qquad \frac{\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\,\varphi(t)}\ \exists\mathbb{F}$$

Again, t is a closed term, and a is a símbolo de constante which does not occur in the branch above the $\exists\mathbb{T}$ rule. We call a the *eigenvariable* of the $\exists\mathbb{T}$ inference.

The condition that an eigenvariable not occur in the branch above the $\forall\mathbb{F}$ or $\exists\mathbb{T}$ inference is called the *eigenvariable condition*.

Recall the convention that when φ is a fórmula with the variável x free, we indicate this by writing $\varphi(x)$. In the same context, $\varphi(t)$ then is short for $\varphi[t/x]$. So we could also write the $\exists\mathbb{F}$ rule as:

explanation

[1] We use the term "eigenvariable" even though a in the above rule is a símbolo de constante. This has historical reasons.

$$\frac{\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi}{\mathbb{F}\,\varphi[t/x]}\,\exists\mathbb{F}$$

Note that t may already occur in φ, p.ex., φ might be $P(t,x)$. Thus, inferring $\mathbb{F}\,P(t,t)$ from $\mathbb{F}\,\exists x\,P(t,x)$ is a correct application of $\exists\mathbb{F}$. However, the eigenvariable conditions in $\forall\mathbb{F}$ and $\exists\mathbb{T}$ require that the símbolo de constante a does not occur in φ. So, you cannot correctly infer $\mathbb{F}\,P(a,a)$ from $\mathbb{F}\,\forall x\,P(a,x)$ using $\forall\mathbb{F}$.

explanation

In $\forall\mathbb{T}$ and $\exists\mathbb{F}$ there are no restrictions on the term t. On the other hand, in the $\exists\mathbb{T}$ and $\forall\mathbb{F}$ rules, the eigenvariable condition requires that the símbolo de constante a does not occur anywhere in the branches above the respective inference. It is necessary to ensure that the system is sound. Without this condition, the following would be a closed tableau for $\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\varphi(x)$:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\varphi(x)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\forall x\,\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi(a)$	$\forall\mathbb{F}\,3$
	$\otimes$	

However, $\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\varphi(x)$ is not valid.

-NoValue-

8.4 Tableaux

explanation

We've said what an assumption is, and we've given the rules of inference. Tableaux are inductively generated from these: each tableau either is a single branch consisting of one or more assumptions, or it results from a tableau by applying one of the rules of inference on a branch.

fol:tab:der:sec

Definição 8.2 (Tableau). A tableau for assumptions $S_1\varphi_1, \ldots, S_n\varphi_n$ (where each S_i is either $\mathbb{T}$ or $\mathbb{F}$) is a finite tree of fórmulas assinadas satisfying the following conditions:

1. The n topmost fórmulas assinadas of the tree are $S_i\varphi_i$, one below the other.
2. Every fórmula assinada in the tree that is not one of the assumptions results from a correct application of an inference rule to a fórmula assinada in the branch above it.

A branch of a tableau is *closed* iff it contains both $\mathbb{T}\,\varphi$ and $\mathbb{F}\,\varphi$, and *open* otherwise. A tableau in which every branch is closed is a *closed tableau* (for its set of assumptions). If a tableau is not closed, O.s., if it contains at least one open branch, it is *open*.

Exemplo 8.3. Every set of assumptions on its own is a tableau, but it will generally not be closed. (Obviously, it is closed only if the assumptions already contain a pair of fórmulas assinadas $\mathbb{T}\varphi$ and $\mathbb{F}\varphi$.)

From a tableau (open or closed) we can obtain a new, larger one by applying one of the rules of inference to a fórmula assinada φ in it. The rule will append one or more fórmulas assinadas to the end of any branch containing the occurrence of φ to which we apply the rule.

For instance, consider the assumption $\mathbb{T}\varphi \wedge \neg\varphi$. Here is the (open) tableau consisting of just that assumption:

1.	$\mathbb{T}\varphi \wedge \neg\varphi$	Assumption

We obtain a new tableau from it by applying the $\wedge\mathbb{T}$ rule to the assumption. That rule allows us to add two new lines to the tableau, $\mathbb{T}\varphi$ and $\mathbb{T}\neg\varphi$:

1.	$\mathbb{T}\varphi \wedge \neg\varphi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
3.	$\mathbb{T}\neg\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$

When we write down tableaux, we record the rules we've applied on the right (p.ex., $\wedge\mathbb{T}1$ means that the fórmula assinada on that line is the result of applying the $\wedge\mathbb{T}$ rule to the fórmula assinada on line 1). This new tableau now contains additional fórmulas assinadas, but to only one ($\mathbb{T}\neg\varphi$) can we apply a rule (in this case, the $\neg\mathbb{T}$ rule). This results in the closed tableau

1.	$\mathbb{T}\varphi \wedge \neg\varphi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
3.	$\mathbb{T}\neg\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,1$
4.	$\mathbb{F}\varphi$	$\neg\mathbb{T}\,3$
	$\otimes$	

-NoValue-

8.5 Examples of Tableaux

fol:tab:pro:sec

Exemplo 8.4. Let's find a closed tableau for the sentença $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$.

We begin by writing the corresponding assumption at the top of the tableau.

1.	$\mathbb{F}(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	Assumption

There is only one assumption, so only one fórmula assinada to which we can apply a rule. (For every fórmula assinada, there is always at most one rule that can be applied: it's the rule for the corresponding sign and operador principal of the sentença.) In this case, this means, we must apply $\to\mathbb{F}$.

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$

To keep track of which fórmulas assinadas we have applied their corresponding rules to, we write a checkmark next to the sentence. However, *only* write a checkmark if the rule has been applied to all open branches. Once a fórmula assinada has had the corresponding rule applied in every open branch, we will not have to return to it and apply the rule again. In this case, there is only one branch, so the rule only has to be applied once. (Note that checkmarks are only a convenience for constructing tableaux and are not officially part of the syntax of tableaux.)

There is one new fórmula assinada to which we can apply a rule: the $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$ on line 2. Applying the $\wedge\mathbb{T}$ rule results in:

1.	$\mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

Since the branch now contains both $\mathbb{T}\,\varphi$ (on line 4) and $\mathbb{F}\,\varphi$ (on line 3), the branch is closed. Since it is the only branch, the tableau is closed. We have found a closed tableau for $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$.

Exemplo 8.5. Now let's find a closed tableau for $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

We begin with the corresponding assumption:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$	Assumption

The one fórmula assinada in this tableau has operador principal $\to$ and sign $\mathbb{F}$, so we apply the $\to\mathbb{F}$ rule to it to obtain:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$	$\to\mathbb{F}\,1$

We now have a choice as to whether to apply $\vee\mathbb{T}$ to line 2 or $\to\mathbb{F}$ to line 3. It actually doesn't matter which order we pick, as long as each fórmula assinada has its corresponding rule applied in every branch. So let's pick the first one. The $\vee\mathbb{T}$ rule allows the tableau to branch, and the two conclusions of the rule will be the new fórmulas assinadas added to the two new branches. This results in:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$ | $\mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$

We have not applied the $\to\mathbb{F}$ rule to line 3 yet: let's do that now. To save time, we apply it to both branches. Recall that we write a checkmark next to a fórmula assinada only if we have applied the corresponding rule in every open branch. So it's a good idea to apply a rule at the end of every branch that contains the fórmula assinada the rule applies to. That way we won't have to return to that fórmula assinada lower down in the various branches.

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$ | $\mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\varphi$ | $\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$ | $\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,3$
	$\otimes$	

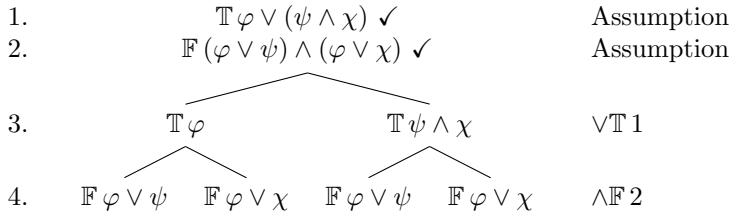
The right branch is now closed. On the left branch, we can still apply the $\neg\mathbb{T}$ rule to line 4. This results in $\mathbb{F}\,\varphi$ and closes the left branch:

1.	$\mathbb{F}\,(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \psi$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$ | $\mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\varphi$ | $\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{F}\,\psi$ | $\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,3$
7.	$\mathbb{F}\,\varphi$ | $\otimes$	$\neg\mathbb{T}\,4$
	$\otimes$	

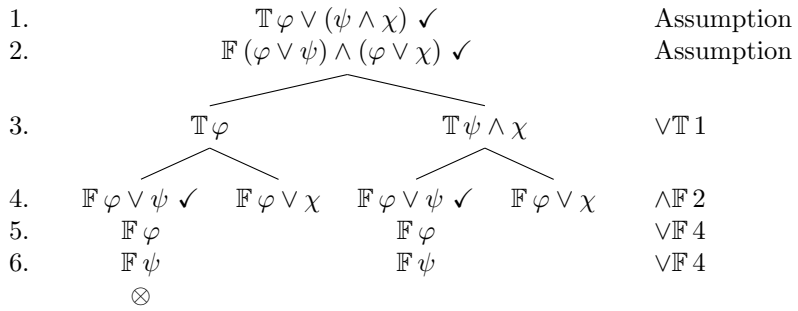
Exemplo 8.6. We can give tableaux for any number of fórmulas assinadas as assumptions. Often it is also necessary to apply more than one rule that allows branching; and in general a tableau can have any number of branches. For instance, consider a tableau for $\{\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)\}$. We start by applying the $\vee\mathbb{T}$ to the first assumption:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$ | $\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$	$\vee\mathbb{T}\,1$

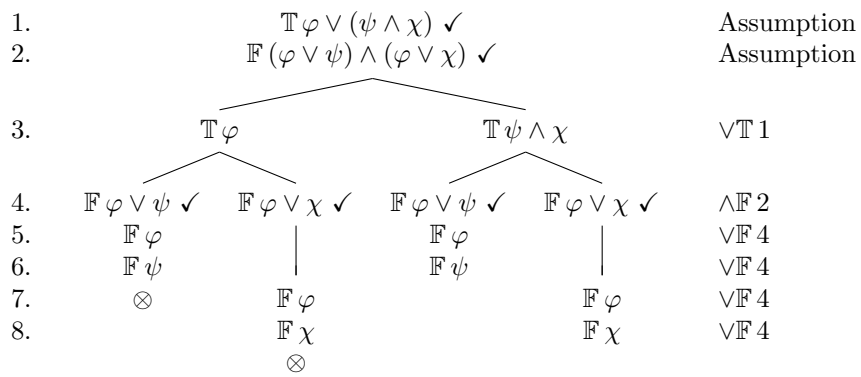
Now we can apply the $\wedge\mathbb{F}$ rule to line 2. We do this on both branches simultaneously, and can therefore check off line 2:



Now we can apply $\vee\mathbb{F}$ to all the branches containing $\varphi \vee \psi$:

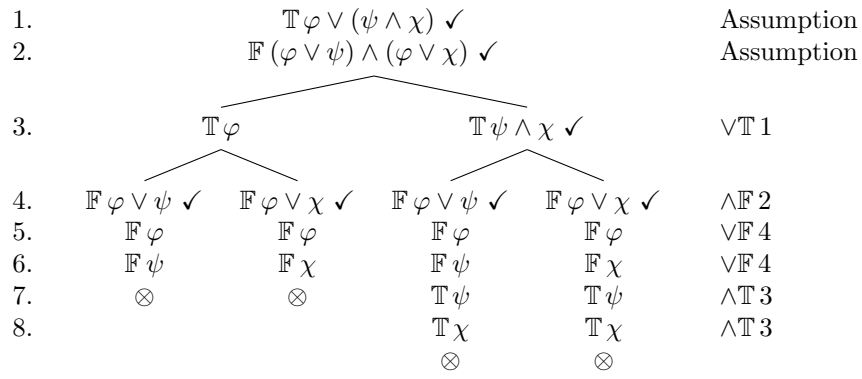


The leftmost branch is now closed. Let's now apply $\vee\mathbb{F}$ to $\varphi \vee \chi$:

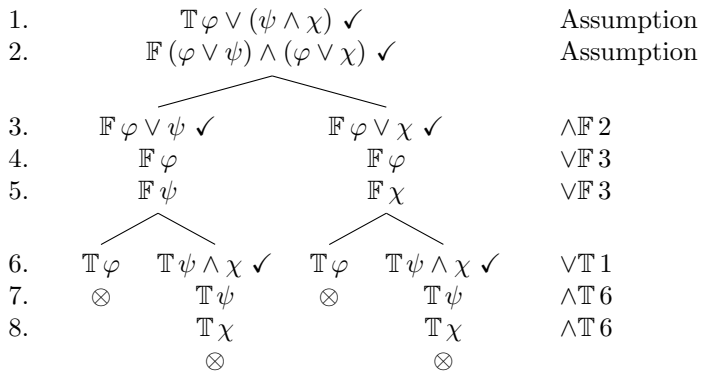


Note that we moved the result of applying $\vee\mathbb{F}$ a second time below for clarity. In this instance it would not have been needed, since the justifications would have been the same.

Two branches remain open, and $\mathbb{T}\,\psi \wedge \chi$ on line 3 remains unchecked. We apply $\wedge\mathbb{T}$ to it to obtain a closed tableau:



For comparison, here's a closed tableau for the same set of assumptions in which the rules are applied in a different order:



Problema 8.1. Give closed tableaux of the following:

1. $\mathbb{T}\,\varphi \wedge (\psi \wedge \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\mathbb{T}\,\varphi \vee (\psi \vee \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\mathbb{T}\,\varphi \to (\psi \to \chi), \mathbb{F}\,\psi \to (\varphi \to \chi)$.
4. $\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{F}\,\neg\neg\varphi$.

Problema 8.2. Give closed tableaux of the following:

1. $\mathbb{T}\,(\varphi \vee \psi) \to \chi, \mathbb{F}\,\varphi \to \chi$.
2. $\mathbb{T}\,(\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi), \mathbb{F}\,(\varphi \vee \psi) \to \chi$.
3. $\mathbb{F}\,\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\mathbb{T}\,\psi \to \varphi, \mathbb{F}\,\neg\varphi \to \neg\psi$.

5. $\mathbb{F}\,(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$.
6. $\mathbb{F}\,\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$.
7. $\mathbb{T}\,\varphi \to \chi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\mathbb{T}\,\varphi \wedge \neg\chi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \to \chi)$.
9. $\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi, \neg\psi, \mathbb{F}\,\varphi$.
10. $\mathbb{T}\,\neg\varphi \vee \neg\psi, \mathbb{F}\,\neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\mathbb{F}\,(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\mathbb{F}\,\neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Problema 8.3. Give closed tableaux of the following:

1. $\mathbb{T}\,\neg(\varphi \to \psi), \mathbb{F}\,\varphi$.
2. $\mathbb{T}\,\neg(\varphi \wedge \psi), \mathbb{F}\,\neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{F}\,\neg\varphi \vee \psi$.
4. $\mathbb{F}\,\neg\neg\varphi \to \varphi$.
5. $\mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi \to \psi, \mathbb{F}\,\psi$.
6. $\mathbb{T}\,(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \mathbb{F}\,(\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$.
7. $\mathbb{T}\,(\varphi \to \psi) \to \varphi, \mathbb{F}\,\varphi$.
8. $\mathbb{F}\,(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \chi)$.

-NoValue-

8.6 Tableaux with Quantifiers

fol:tab:prq:sec

Exemplo 8.7. When dealing with quantifiers, we have to make sure not to violate the eigenvariable condition, and sometimes this requires us to play around with the order of carrying out certain inferences. In general, it helps to try and take care of rules subject to the eigenvariable condition first (they will be higher up in the finished tableau).

Let's see how we'd give a tableau for the sentença $\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x)$. Starting as usual, we start by recording the assumption,

$$1. \qquad \mathbb{F}\,\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x) \qquad \text{Assumption}$$

Since the operador principal is $\to$, we apply the $\to\mathbb{F}$:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\neg\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$

The next line to deal with is 2. We use $\exists\mathbb{T}$. This requires a new símbolo de constante; since no símbolos de constante yet occur, we can pick any one, say, a.

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\neg\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x)$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$

Now we apply $\neg\mathbb{F}$ to line 3:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\neg\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$	$\neg\mathbb{F}\,3$

We obtain a closed tableau by applying $\neg\mathbb{T}$ to line 4, followed by $\forall\mathbb{T}$ to line 5.

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,\neg\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
3.	$\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x)$ ✓	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{T}\,\forall x\,\varphi(x)$	$\neg\mathbb{F}\,3$
6.	$\mathbb{F}\,\varphi(a)$	$\neg\mathbb{T}\,4$
7.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)$	$\forall\mathbb{T}\,5$
	$\otimes$	

Exemplo 8.8. Let's see how we'd give a tableau for the set

$$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b), \mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x)), \mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x) \to \chi(x,b)).$$

Starting as usual, we start with the assumptions:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x))$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x) \to \chi(x,b))$	Assumption

We should always apply a rule with the eigenvariable condition first; in this case that would be $\exists\mathbb{T}$ to line 2. Since the assumptions contain the símbolo de constante b, we have to use a different one; let's pick a again.

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ ✓	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	Assumption
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)\wedge\psi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$

If we now apply $\exists\mathbb{F}$ to line 1 or $\forall\mathbb{T}$ to line 3, we have to decide which term t to substitute for x. Since there is no eigenvariable condition for these rules, we can pick any term we like. In some cases we may even have to apply the rule several times with different ts. But as a general rule, it pays to pick one of the terms already occurring in the tableau—in this case, a and b—and in this case we can guess that a will be more likely to result in a closed branch.

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ ✓	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	Assumption
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)\wedge\psi(a)$	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\chi(a,b)$	$\exists\mathbb{F}\,1$
6.	$\mathbb{T}\,\psi(a)\to\chi(a,b)$	$\forall\mathbb{T}\,3$

We don't check the fórmulas assinadas in lines 1 and 3, since we may have to use them again. Now apply $\wedge\mathbb{T}$ to line 4:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ ✓	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	Assumption
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)\wedge\psi(a)$ ✓	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\chi(a,b)$	$\exists\mathbb{F}\,1$
6.	$\mathbb{T}\,\psi(a)\to\chi(a,b)$	$\forall\mathbb{T}\,3$
7.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)$	$\wedge\mathbb{T}\,4$
8.	$\mathbb{T}\,\psi(a)$	$\wedge\mathbb{T}\,4$

If we now apply $\to\mathbb{T}$ to line 6, the tableau closes:

1.	$\mathbb{F}\,\exists x\,\chi(x,b)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\exists x\,(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ ✓	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\forall x\,(\psi(x)\to\chi(x,b))$	Assumption
4.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)\wedge\psi(a)$ ✓	$\exists\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\chi(a,b)$	$\exists\mathbb{F}\,1$
6.	$\mathbb{T}\,\psi(a)\to\chi(a,b)$ ✓	$\forall\mathbb{T}\,3$
7.	$\mathbb{T}\,\varphi(a)$	$\wedge\mathbb{T}\,4$
8.	$\mathbb{T}\,\psi(a)$	$\wedge\mathbb{T}\,4$
9.	$\mathbb{F}\,\psi(a)$ ⊗ | $\mathbb{T}\,\chi(a,b)$ ⊗	$\to\mathbb{T}\,6$

Exemplo 8.9. We construct a tableau for the set

$$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x), \mathbb{T}\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y), \mathbb{T}\neg\exists y\,\psi(y).$$

Starting as usual, we write down the assumptions:

1.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\neg\exists y\,\psi(y)$	Assumption

We begin by applying the $\neg\mathbb{T}$ rule to line 3. A corollary to the rule "always apply rules with eigenvariable conditions first" is "defer applying quantifier rules without eigenvariable conditions until needed." Also, defer rules that result in a split.

1.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\neg\exists y\,\psi(y)$ ✓	Assumption
4.	$\mathbb{F}\exists y\,\psi(y)$	$\neg\mathbb{T}\,3$

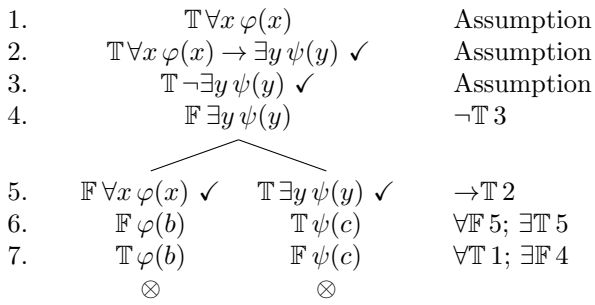
The new line 4 requires $\exists\mathbb{F}$, a quantifier rule without the eigenvariable condition. So we defer this in favor of using $\to\mathbb{T}$ on line 2.

1.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x)$		Assumption
2.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ ✓		Assumption
3.	$\mathbb{T}\neg\exists y\,\psi(y)$ ✓		Assumption
4.	$\mathbb{F}\exists y\,\psi(y)$		$\neg\mathbb{T}\,3$
5.	$\mathbb{F}\forall x\,\varphi(x)$	$\mathbb{T}\exists y\,\psi(y)$	$\to\mathbb{T}\,2$

Both new fórmulas assinadas require rules with eigenvariable conditions, so these should be next:

1.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x)$		Assumption
2.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x) \to \exists y\,\psi(y)$ ✓		Assumption
3.	$\mathbb{T}\neg\exists y\,\psi(y)$ ✓		Assumption
4.	$\mathbb{F}\exists y\,\psi(y)$		$\neg\mathbb{T}\,3$
5.	$\mathbb{F}\forall x\,\varphi(x)$ ✓	$\mathbb{T}\exists y\,\psi(y)$ ✓	$\to\mathbb{T}\,2$
6.	$\mathbb{F}\,\varphi(b)$	$\mathbb{T}\,\psi(c)$	$\forall\mathbb{F}\,5$; $\exists\mathbb{T}\,5$

To close the branches, we have to use the fórmulas assinadas on lines 1 and 3. The corresponding rules ($\forall\mathbb{T}$ and $\exists\mathbb{F}$) don't have eigenvariable conditions, so we are free to pick whichever terms are suitable. In this case, that's b and c, respectively.



Problema 8.4. Give closed tableaux of the following:

1. $\mathbb{F}\,(\forall x\,\varphi(x) \land \forall y\,\psi(y)) \to \forall z\,(\varphi(z) \land \psi(z))$.
2. $\mathbb{F}\,(\exists x\,\varphi(x) \lor \exists y\,\psi(y)) \to \exists z\,(\varphi(z) \lor \psi(z))$.
3. $\mathbb{T}\,\forall x\,(\varphi(x) \to \psi), \mathbb{F}\,\exists y\,\varphi(y) \to \psi$.
4. $\mathbb{T}\,\forall x\,\neg\varphi(x), \mathbb{F}\,\neg\exists x\,\varphi(x)$.
5. $\mathbb{F}\,\neg\exists x\,\varphi(x) \to \forall x\,\neg\varphi(x)$.
6. $\mathbb{F}\,\neg\exists x\,\forall y\,((\varphi(x,y) \to \neg\varphi(y,y)) \land (\neg\varphi(y,y) \to \varphi(x,y)))$.

Problema 8.5. Give closed tableaux of the following:

1. $\mathbb{F}\,\neg\forall x\,\varphi(x) \to \exists x\,\neg\varphi(x)$.
2. $\mathbb{T}\,(\forall x\,\varphi(x) \to \psi), \mathbb{F}\,\exists y\,(\varphi(y) \to \psi)$.
3. $\mathbb{F}\,\exists x\,(\varphi(x) \to \forall y\,\varphi(y))$.

-NoValue-

8.7 Proof-Theoretic Notions

fol:tab:ptn:sec

This section collects the definitions of the provability relation and consistency for tableaux.

explanation

Just as we've defined a number of important semantic notions (validity, entailment, satisfiability), we now define corresponding *proof-theoretic notions*. These are not defined by appeal to satisfaction of sentenças in estruturas, but by appeal to the existence of certain closed tableaux. It was an important discovery that these notions coincide. That they do is the content of the *soundness* and *completeness theorems*.

Definição 8.10 (Theorems). A sentença φ is a *theorem* if there is a closed tableau for $\mathbb{F}\,\varphi$. We write $\vdash \varphi$ if φ is a theorem and $\nvdash \varphi$ if it is not.

Definição 8.11 (Derivabilidade). A sentença φ is *derivável from* a set of sentenças Γ, $\Gamma \vdash \varphi$ iff there is a finite set $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ and a closed tableau for the set

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

If φ is not derivável from Γ we write $\Gamma \nvdash \varphi$.

Definição 8.12 (Consistency). A set of sentenças Γ is *inconsistent* iff there is a finite set $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ and a closed tableau for the set

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

If Γ is not inconsistent, we say it is *consistent*.

fol:tab:ptn: prop:reflexivity **Proposição 8.13 (Reflexivity).** *If $\varphi \in \Gamma$, then $\Gamma \vdash \varphi$.*

Prova. If $\varphi \in \Gamma$, $\{\varphi\}$ is a finite subset of Γ and the tableau

1.	$\mathbb{F}\,\varphi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	Assumption
	$\otimes$	

is closed. □

fol:tab:ptn: prop:monotonicity **Proposição 8.14 (Monotonicity).** *If $\Gamma \subseteq \Delta$ and $\Gamma \vdash \varphi$, then $\Delta \vdash \varphi$.*

Prova. Any finite subset of Γ is also a finite subset of Δ. □

fol:tab:ptn: prop:transitivity **Proposição 8.15 (Transitivity).** *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, then $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*

Prova. If $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, then there is a finite subset $\Delta_0 = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \subseteq \Delta$ such that

$$\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n\}$$

has a closed tableau. If $\Gamma \vdash \varphi$ then there are $\theta_1, \ldots, \theta_m$ such that

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m\}$$

has a closed tableau.

Now consider the tableau with assumptions

$$\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m.$$

Apply the Cut rule on φ. This generates two branches, one has $\mathbb{T}\,\varphi$ in it, the other $\mathbb{F}\,\varphi$. Thus, on the one branch, all of

$$\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_n\}$$

are available. Since there is a closed tableau for these assumptions, we can attach it to that branch; every branch through $\mathbb{T}\,\varphi$ closes. On the other branch, all of

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\theta_1, \ldots, \mathbb{T}\,\theta_m\}$$

are available, so we can also complete the other side to obtain a closed tableau. This shows $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. □

Note that this means that in particular if $\Gamma \vdash \varphi$ and $\varphi \vdash \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$. It follows also that if $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ and $\Gamma \vdash \varphi_i$ for each i, then $\Gamma \vdash \psi$.

Proposição 8.16. *Γ is inconsistent iff $\Gamma \vdash \varphi$ for every sentença φ.*

fol:tab:ptn:prop:incons

Prova. Exercise. □

Problema 8.6. Prove Proposição 8.16

Proposição 8.17 (Compactness).

fol:tab:ptn:prop:proves-compact

1. *If $\Gamma \vdash \varphi$ then there is a finite subset $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma_0 \vdash \varphi$.*
2. *If every finite subset of Γ is consistent, then Γ is consistent.*

Prova. 1. If $\Gamma \vdash \varphi$, then there is a finite subset $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ and a closed tableau for

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

This tableau also shows $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

2. If Γ is inconsistent, then for some finite subset $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ there is a closed tableau for

$$\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

This closed tableau shows that Γ_0 is inconsistent. □

-NoValue-

8.8 Derivabilidade and Consistency

We will now establish a number of properties of the derivabilidade relation. They are independently interesting, but each will play a role in the proof of the completeness theorem.

fol:tab:prv:sec

Proposição 8.18. *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent, then Γ is inconsistent.*

fol:tab:prv:prop:provability-contr

Prova. There are finite $\Gamma_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ and $\Gamma_1 = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \subseteq \Gamma$ such that

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$
$$\{\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\chi_m\}$$

have closed tableaux. Using the Cut rule on φ we can combine these into a single closed tableau that shows $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ is inconsistent. Since $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ and $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, hence Γ is inconsistent. □

fol:tab:prv: prop:prov-incons

Proposição 8.19. *$\Gamma \vdash \varphi$ iff $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent.*

Prova. First suppose $\Gamma \vdash \varphi$, O.s., there is a closed tableau for

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

Using the $\neg\mathbb{T}$ rule, this can be turned into a closed tableau for

$$\{\mathbb{T}\,\neg\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}.$$

On the other hand, if there is a closed tableau for the latter, we can turn it into a closed tableau of the former by removing every formula that results from $\neg\mathbb{T}$ applied to the first assumption $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ as well as that assumption, and adding the assumption $\mathbb{F}\,\varphi$. For if a branch was closed before because it contained the conclusion of $\neg\mathbb{T}$ applied to $\mathbb{T}\,\neg\varphi$, O.s., $\mathbb{F}\,\varphi$, the corresponding branch in the new tableau is also closed. If a branch in the old tableau was closed because it contained the assumption $\mathbb{T}\,\neg\varphi$ as well as $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ we can turn it into a closed branch by applying $\neg\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\,\neg\varphi$ to obtain $\mathbb{T}\,\varphi$. This closes the branch since we added $\mathbb{F}\,\varphi$ as an assumption. □

Problema 8.7. Prove that $\Gamma \vdash \neg\varphi$ iff $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent.

fol:tab:prv: prop:explicit-inc

Proposição 8.20. *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\neg\varphi \in \Gamma$, then Γ is inconsistent.*

Prova. Suppose $\Gamma \vdash \varphi$ and $\neg\varphi \in \Gamma$. Then there are $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ such that

$$\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$$

has a closed tableau. Replace the assumption $\mathbb{F}\,\varphi$ by $\mathbb{T}\,\neg\varphi$, and insert the conclusion of $\neg\mathbb{T}$ applied to $\mathbb{F}\,\varphi$ after the assumptions. Any sentença in the tableau justified by appeal to line 1 in the old tableau is now justified by appeal to line $n+1$. So if the old tableau was closed, the new one is. It shows that Γ is inconsistent, since all assumptions are in Γ. □

fol:tab:prv: prop:provability-exhaustive

Proposição 8.21. *If $\Gamma \cup \{\varphi\}$ and $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ are both inconsistent, then Γ is inconsistent.*

Prova. If there are $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ and $\chi_1, \ldots, \chi_m \in \Gamma$ such that

$$\{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\psi_n\} \text{ and}$$
$$\{\mathbb{T}\neg\varphi, \mathbb{T}\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\chi_m\}$$

both have closed tableaux, we can construct a single, combined tableau that shows that Γ is inconsistent by using as assumptions $\mathbb{T}\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\psi_n$ together with $\mathbb{T}\chi_1, \ldots, \mathbb{T}\chi_m$, followed by an application of the Cut rule. This yields two branches, one starting with $\mathbb{T}\varphi$, the other with $\mathbb{F}\varphi$.

On the left left side, add the part of the first tableau below its assumptions. Here, every rule application is still correct, since each of the assumptions of the first tableau, including $\mathbb{T}\varphi$, is available. Thus, every branch below $\mathbb{T}\varphi$ closes.

On the right side, add the part of the second tableau below its assumption, with the results of any applications of $\neg\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\neg\varphi$ removed. The conclusion of $\neg\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\neg\varphi$ is $\mathbb{F}\varphi$, which is nevertheless available, as it is the conclusion of the Cut rule on the right side of the combined tableau.

If a branch in the second tableau was closed because it contained the assumption $\mathbb{T}\neg\varphi$ (which no longer appears as an assumption in the combined tableau) as well as $\mathbb{F}\neg\varphi$, we can applying $\neg\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\neg\varphi$ to obtain $\mathbb{T}\varphi$. Now the corresponding branch in the combined tableau also closes, because it contains the right-hand conclusion of the Cut rule, $\mathbb{F}\varphi$. If a branch in the second tableau closed for any other reason, the corresponding branch in the combined tableau also closes, since any fórmulas assinadas other than $\mathbb{T}\neg\varphi$ occurring on the branch in the old, second tableau also occur on the corresponding branch in the combined tableau. □

-NoValue-

8.9 Derivabilidade and the Propositional Connectives

explanation

We establish that the derivabilidade relation $\vdash$ of tableaux is strong enough to establish some basic facts involving the propositional connectives, such as that $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ and $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (modus ponens). These facts are needed for the proof of the completeness theorem.

fol:tab:ppr:sec

Proposição 8.22.

fol:tab:ppr:prop:provability-land
fol:tab:ppr:prop:provability-land-left
fol:tab:ppr:prop:provability-land-right

1. *Both* $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ *and* $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.
2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

Prova. 1. Both $\{\mathbb{F}\varphi, \mathbb{T}\varphi \wedge \psi\}$ and $\{\mathbb{F}\psi, \mathbb{T}\varphi \wedge \psi\}$ have closed tableaux

1.	$\mathbb{F}\varphi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi \wedge \psi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
4.	$\mathbb{T}\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\,\psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \wedge \psi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
4.	$\mathbb{T}\psi$	$\wedge\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

2. Here is a closed tableau for $\{\mathbb{T}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi, \mathbb{F}\,\varphi \wedge \psi\}$:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \wedge \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\psi$	Assumption
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$ $\quad$ $\mathbb{F}\,\psi$	$\wedge\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$ $\quad$ $\otimes$	

fol:tab:ppr: prop:provability-lor

Proposição 8.23.

1. *$\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\}$ is inconsistent.*
2. *Both $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ and $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.*

Prova. 1. We give a closed tableau of $\{\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi, \mathbb{T}\,\neg\psi\}$:

1.	$\mathbb{T}\,\varphi \vee \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\neg\psi$	Assumption
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\neg\mathbb{T}\,2$
5.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\neg\mathbb{T}\,3$
6.	$\mathbb{T}\,\varphi$ $\quad$ $\mathbb{T}\,\psi$	$\vee\mathbb{T}\,1$
	$\otimes$ $\quad$ $\otimes$	

2. Both $\{\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\varphi\}$ and $\{\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\,\psi\}$ have closed tableaux:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\varphi$	Assumption
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\psi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \vee \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\psi$	Assumption
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\psi$	$\vee\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

Proposição 8.24.

fol:tab:ppr: prop:provability-lif

fol:tab:ppr: prop:provability-lif-left

fol:tab:ppr: prop:provability-lif-right

1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.
2. *Both* $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ *and* $\psi \vdash \varphi \to \psi$.

Prova. 1. $\{\mathbb{F}\,\psi, \mathbb{T}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\varphi\}$ has a closed tableau:

1.	$\mathbb{F}\,\psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\varphi \to \psi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	Assumption
4.	$\mathbb{F}\,\varphi$ $\quad$ $\mathbb{T}\,\psi$	$\to\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$ $\quad$ $\otimes$	

2. Both $\{\mathbb{F}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\neg\varphi\}$ and $\{\mathbb{F}\,\varphi \to \psi, \mathbb{T}\,\psi\}$ have closed tableaux:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \to \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\neg\varphi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
5.	$\mathbb{F}\,\varphi$	$\neg\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\,\varphi \to \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\,\psi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\varphi$	$\to\mathbb{F}\,1$
4.	$\mathbb{F}\,\psi$	$\to\mathbb{F}\,1$
	$\otimes$	

-NoValue-

8.10 Derivabilidade and the Quantifiers

fol:tab:qpr:sec

The completeness theorem also requires that the tableaux rules yield the facts about $\vdash$ established in this section. explanation

fol:tab:qpr:thm:strong-generalization

Teorema 8.25. *If c is a constant not occurring in Γ or $\varphi(x)$ and $\Gamma \vdash \varphi(c)$, then $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$.*

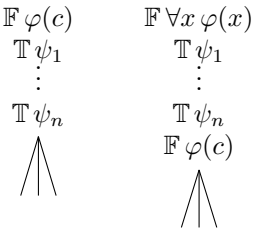
Prova. Suppose $\Gamma \vdash \varphi(c)$, O.s., there are $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ and a closed tableau for

$$\{\mathbb{F}\, \varphi(c), \mathbb{T}\, \psi_1, \ldots, \mathbb{T}\, \psi_n\}.$$

We have to show that there is also a closed tableau for

$$\{\mathbb{F}\, \forall x\, \varphi(x), \mathbb{T}\, \psi_1, \ldots, \mathbb{T}\, \psi_n\}.$$

Take the closed tableau and replace the first assumption with $\mathbb{F}\, \forall x\, \varphi(x)$, and insert $\mathbb{F}\, \varphi(c)$ after the assumptions.



The tableau is still closed, since all sentenças available as assumptions before are still available at the top of the tableau. The inserted line is the result of a correct application of $\forall\mathbb{F}$, since the símbolo de constante c does not occur in $\psi_1, \ldots, \psi_n$ or $\forall x\, \varphi(x)$, O.s., it does not occur above the inserted line in the new tableau. □

fol:tab:qpr:prop:provability-quantifiers

Proposição 8.26.

1. $\varphi(t) \vdash \exists x\, \varphi(x)$.
2. $\forall x\, \varphi(x) \vdash \varphi(t)$.

Prova. 1. A closed tableau for $\mathbb{F}\, \exists x\, \varphi(x), \mathbb{T}\, \varphi(t)$ is:

1.	$\mathbb{F}\, \exists x\, \varphi(x)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\, \varphi(t)$	Assumption
3.	$\mathbb{F}\, \varphi(t)$	$\exists\mathbb{F}\, 1$
	$\otimes$	

2. A closed tableau for $\mathbb{F}\, \varphi(t), \mathbb{T}\, \forall x\, \varphi(x)$, is:

1.	$\mathbb{F}\,\varphi(t)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\forall x\,\varphi(x)$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\,\varphi(t)$	$\forall\mathbb{T}\,2$
	$\otimes$	

-NoValue-

8.11 Soundness

explanation

A derivação system, such as tableaux, is *sound* if it cannot deriva things that do not actually hold. Soundness is thus a kind of guaranteed safety property for derivação systems. Depending on which proof theoretic property is in question, we would like to know for instance, that

fol:tab:sou:sec

1. every derivável φ is valid;
2. if a sentença is derivável from some others, it is also a consequence of them;
3. if a set of sentenças is inconsistent, it is unsatisfiable.

These are important properties of a derivação system. If any of them do not hold, the derivação system is deficient—it would deriva too much. Consequently, establishing the soundness of a derivação system is of the utmost importance.

Because all these proof-theoretic properties are defined via closed tableaux of some kind or other, proving (1)–(3) above requires proving something about the semantic properties of closed tableaux. We will first define what it means for a fórmula assinada to be satisfied in a structure, and then show that if a tableau is closed, no structure satisfies all its assumptions. (1)–(3) then follow as corollaries from this result.

Definição 8.27. A estrutura $\mathfrak{M}$ *satisfies* a fórmula assinada $\mathbb{T}\,\varphi$ iff $\mathfrak{M} \vDash \varphi$, and it satisfies $\mathbb{F}\,\varphi$ iff $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. $\mathfrak{M}$ satisfies a set of fórmulas assinadas Γ iff it satisfies every $S\,\varphi \in \Gamma$. Γ is *satisfiable* if there is a estrutura that satisfies it, and *unsatisfiable* otherwise.

Teorema 8.28 (Soundness). *If Γ has a closed tableau, Γ is unsatisfiable.*

fol:tab:sou:thm:tableau-soundness

Prova. Let's call a branch of a tableau satisfiable iff the set of fórmulas assinadas on it is satisfiable, and let's call a tableau satisfiable if it contains at least one satisfiable branch.

We show the following: Extending a satisfiable tableau by one of the rules of inference always results in a satisfiable tableau. This will prove the theorem: any closed tableau results by applying rules of inference to the tableau consisting only of assumptions from Γ. So if Γ were satisfiable, any tableau for it would be satisfiable. A closed tableau, however, is clearly not satisfiable:

every branch contains both $\mathbb{T}\varphi$ and $\mathbb{F}\varphi$, and no structure can both satisfy and not satisfy φ.

Suppose we have a satisfiable tableau, O.s., a tableau with at least one satisfiable branch. Applying a rule of inference either adds fórmulas assinadas to a branch, or splits a branch in two. If the tableau has a satisfiable branch which is not extended by the rule application in question, it remains a satisfiable branch in the extended tableau, so the extended tableau is satisfiable. So we only have to consider the case where a rule is applied to a satisfiable branch.

Let Γ be the set of fórmulas assinadas on that branch, and let $S\varphi \in \Gamma$ be the fórmula assinada to which the rule is applied. If the rule does not result in a split branch, we have to show that the extended branch, O.s., Γ together with the conclusions of the rule, is still satisfiable. If the rule results in a split branch, we have to show that at least one of the two resulting branches is satisfiable.

First, we consider the possible inferences that do not result in a split branch.

1. The branch is expanded by applying $\neg\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\neg\psi \in \Gamma$. Then the extended branch contains the fórmulas assinadas $\Gamma \cup \{\mathbb{F}\psi\}$. Suppose $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$. In particular, $\mathfrak{M} \vDash \neg\psi$. Thus, $\mathfrak{M} \nvDash \psi$, O.s., $\mathfrak{M}$ satisfies $\mathbb{F}\psi$.

2. The branch is expanded by applying $\neg\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\neg\psi \in \Gamma$: Exercise.

3. The branch is expanded by applying $\wedge\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\psi \wedge \chi \in \Gamma$, which results in two new fórmulas assinadas on the branch: $\mathbb{T}\psi$ and $\mathbb{T}\chi$. Suppose $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, in particular $\mathfrak{M} \vDash \psi \wedge \chi$. Then $\mathfrak{M} \vDash \psi$ and $\mathfrak{M} \vDash \chi$. This means that $\mathfrak{M}$ satisfies both $\mathbb{T}\psi$ and $\mathbb{T}\chi$.

4. The branch is expanded by applying $\vee\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\psi \vee \chi \in \Gamma$: Exercise.

5. The branch is expanded by applying $\rightarrow\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\psi \rightarrow \chi \in \Gamma$: This results in two new fórmulas assinadas on the branch: $\mathbb{T}\psi$ and $\mathbb{F}\chi$. Suppose $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, in particular $\mathfrak{M} \nvDash \psi \rightarrow \chi$. Then $\mathfrak{M} \vDash \psi$ and $\mathfrak{M} \nvDash \chi$. This means that $\mathfrak{M}$ satisfies both $\mathbb{T}\psi$ and $\mathbb{F}\chi$.

6. The branch is expanded by applying $\forall\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\forall x\,\psi(x) \in \Gamma$: This results in a new fórmula assinada $\mathbb{T}\varphi(t)$ on the branch. Suppose $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, in particular, $\mathfrak{M} \vDash \forall x\,\varphi(x)$. By Proposição 3.31, $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t)$. Consequently, $\mathfrak{M}$ satisfies $\mathbb{T}\varphi(t)$.

7. The branch is expanded by applying $\forall\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\forall x\,\psi(x) \in \Gamma$: This results in a new fórmula assinada $\mathbb{F}\varphi(a)$ where a is a símbolo de constante not occurring in Γ. Since Γ is satisfiable, there is a $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, in particular $\mathfrak{M} \nvDash \forall x\,\psi(x)$. We have to show that $\Gamma \cup \{\mathbb{F}\varphi(a)\}$ is satisfiable. To do this, we define a suitable $\mathfrak{M}'$ as follows.

   By Proposição 3.19, $\mathfrak{M} \nvDash \forall x\,\psi(x)$ iff for some s, $\mathfrak{M}, s \nvDash \psi(x)$. Now let $\mathfrak{M}'$ be just like $\mathfrak{M}$, except $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$. By Corolário 3.21, for any $\mathbb{T}\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M}' \vDash \chi$, and for any $\mathbb{F}\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M}' \nvDash \chi$, since a does not occur in Γ.

By Proposição 3.20, $\mathfrak{M}', s \not\models \varphi(x)$. By Proposição 3.23, $\mathfrak{M}', s \not\models \varphi(a)$. Since $\varphi(a)$ is a sentença, by Proposição 3.18, $\mathfrak{M}' \not\models \varphi(a)$, O.s., $\mathfrak{M}'$ satisfies $\mathbb{F}\,\varphi(a)$.

8. The branch is expanded by applying $\exists\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\,\exists x\,\psi(x) \in \Gamma$: Exercise.

9. The branch is expanded by applying $\exists\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\,\exists x\,\psi(x) \in \Gamma$: Exercise.

Now let's consider the possible inferences that result in a split branch.

1. The branch is expanded by applying $\wedge\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\,\psi \wedge \chi \in \Gamma$, which results in two branches, a left one continuing through $\mathbb{F}\,\psi$ and a right one through $\mathbb{F}\,\chi$. Suppose $\mathfrak{M} \models \Gamma$, in particular $\mathfrak{M} \not\models \psi \wedge \chi$. Then $\mathfrak{M} \not\models \psi$ or $\mathfrak{M} \not\models \chi$. In the former case, $\mathfrak{M}$ satisfies $\mathbb{F}\,\psi$, O.s., $\mathfrak{M}$ satisfies the formulas on the left branch. In the latter, $\mathfrak{M}$ satisfies $\mathbb{F}\,\chi$, O.s., $\mathfrak{M}$ satisfies the formulas on the right branch.

2. The branch is expanded by applying $\vee\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\,\psi \vee \chi \in \Gamma$: Exercise.

3. The branch is expanded by applying $\to\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\,\psi \to \chi \in \Gamma$: Exercise.

4. The branch is expanded by Cut: This results in two branches, one containing $\mathbb{T}\,\psi$, the other containing $\mathbb{F}\,\psi$. Since $\mathfrak{M} \models \Gamma$ and either $\mathfrak{M} \models \psi$ or $\mathfrak{M} \not\models \psi$, $\mathfrak{M}$ satisfies either the left or the right branch. □

Problema 8.8. Complete the proof of Teorema 8.28.

Corolário 8.29. *If $\vdash \varphi$ then φ is valid.*

fol:tab:sou: cor:weak-soundness

Corolário 8.30. *If $\Gamma \vdash \varphi$ then $\Gamma \models \varphi$.*

fol:tab:sou: cor:entailment-soundness

Prova. If $\Gamma \vdash \varphi$ then for some $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$, $\{\mathbb{F}\,\varphi, \mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$ has a closed tableau. By Teorema 8.28, every estrutura $\mathfrak{M}$ either makes some ψ_i false or makes φ true. Hence, if $\mathfrak{M} \models \Gamma$ then also $\mathfrak{M} \models \varphi$. □

Corolário 8.31. *If Γ is satisfiable, then it is consistent.*

fol:tab:sou: cor:consistency-soundness

Prova. We prove the contrapositive. Suppose that Γ is not consistent. Then there are $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ and a closed tableau for $\{\mathbb{T}\,\psi_1, \ldots, \mathbb{T}\,\psi_n\}$. By Teorema 8.28, there is no $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{M} \models \psi_i$ for all $i = 1, \ldots, n$. But then Γ is not satisfiable. □

-NoValue-

8.12 Tableaux with Predicado de identidade

fol:tab:ide: sec

Tableaux with predicado de identidade require additional inference rules. The rules for $=$ are (t, t_1, and t_2 are closed terms):

$$\frac{}{\mathbb{T}\, t = t}\,{=} \qquad \frac{\mathbb{T}\, t_1 = t_2 \quad \mathbb{T}\, \varphi(t_1)}{\mathbb{T}\, \varphi(t_2)}\,{=}\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{T}\, t_1 = t_2 \quad \mathbb{F}\, \varphi(t_1)}{\mathbb{F}\, \varphi(t_2)}\,{=}\mathbb{F}$$

Note that in contrast to all the other rules, $=\mathbb{T}$ and $=\mathbb{F}$ require that *two* signed fórmulas already appear on the branch, namely both $\mathbb{T}\, t_1 = t_2$ and $S\, \varphi(t_1)$.

Exemplo 8.32. If s and t are closed terms, then $s = t, \varphi(s) \vdash \varphi(t)$:

1.	$\mathbb{F}\, \varphi(t)$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\, s = t$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\, \varphi(s)$	Assumption
4.	$\mathbb{T}\, \varphi(t)$	$=\mathbb{T}\, 2, 3$
	$\otimes$	

This may be familiar as the principle of substitutability of identicals, or Leibniz' Law.

Tableaux prove that $=$ is symmetric, O.s., that $s_1 = s_2 \vdash s_2 = s_1$:

1.	$\mathbb{F}\, s_2 = s_1$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\, s_1 = s_2$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\, s_1 = s_1$	$=$
4.	$\mathbb{T}\, s_2 = s_1$	$=\mathbb{T}\, 2, 3$
	$\otimes$	

Here, line 2 is the first prerequisite fórmula $\mathbb{T}\, s_1 = s_2$ of $=\mathbb{T}$. Line 3 is the second one, of the form $\mathbb{T}\, \varphi(s_2)$—think of $\varphi(x)$ as $x = s_1$, then $\varphi(s_1)$ is $s_1 = s_1$ and $\varphi(s_2)$ is $s_2 = s_1$.

They also prove that $=$ is transitive, O.s., that $s_1 = s_2, s_2 = s_3 \vdash s_1 = s_3$:

1.	$\mathbb{F}\, s_1 = s_3$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\, s_1 = s_2$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\, s_2 = s_3$	Assumption
4.	$\mathbb{T}\, s_1 = s_3$	$=\mathbb{T}\, 3, 2$
	$\otimes$	

In this tableau, the first prerequisite fórmula of $=\mathbb{T}$ is line 3, $\mathbb{T}\, s_2 = s_3$ (s_2 plays the role of t_1, and s_3 the role of t_2). The second prerequisite, of the

form $\mathbb{T}\varphi(s_2)$ is line 2. Here, think of $\varphi(x)$ as $s_1 = x$; that makes $\varphi(s_2)$ into $t_1 = t_2$ (O.s., line 2) and $\varphi(s_3)$ into the fórmula $s_1 = s_3$ in the conclusion.

Problema 8.9. Give closed tableaux for the following:

1. $\mathbb{F}\,\forall x\,\forall y\,((x = y \wedge \varphi(x)) \to \varphi(y))$
2. $\mathbb{F}\,\exists x\,(\varphi(x) \wedge \forall y\,(\varphi(y) \to y = x))$,
   $\mathbb{T}\,\exists x\,\varphi(x) \wedge \forall y\,\forall z\,((\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \to y = z)$

-NoValue-

8.13 Soundness with Predicado de identidade

fol:tab:sid:sec

Proposição 8.33. *Tableaux with rules for identity are sound: no closed tableau is satisfiable.*

Prova. We just have to show as before that if a tableau has a satisfiable branch, the branch resulting from applying one of the rules for = to it is also satisfiable. Let Γ be the set of signed fórmulas on the branch, and let $\mathfrak{M}$ be a estrutura satisfying Γ.

Suppose the branch is expanded using =, O.s., by adding the signed fórmula $\mathbb{T}\,t = t$. Trivially, $\mathfrak{M} \vDash t = t$, so $\mathfrak{M}$ also satisfies $\Gamma \cup \{\mathbb{T}\,t = t\}$.

If the branch is expanded using $=\mathbb{T}$, we add a signed fórmula $S\,\varphi(t_2)$, but Γ contains both $\mathbb{T}\,t_1 = t_2$ and $\mathbb{T}\,\varphi(t_1)$. Thus we have $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$ and $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_1)$. Let s be a variable assignment with $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1)$. By Proposição 3.18, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_1)$. Since $s \sim_x s$, by Proposição 3.23, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(x)$. since $\mathfrak{M} \vDash t_1 = t_2$, we have $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$, and hence $s(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. By applying Proposição 3.23 again, we also have $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi(t_2)$. By Proposição 3.18, $\mathfrak{M} \vDash \varphi(t_2)$. The case of $=\mathbb{F}$ is treated similarly. □

Capítulo 9

Axiomatic Derivações

No effort has been made yet to ensure that the material in this chapter respects various tags indicating which connectives and quantifiers are primitive or defined: all are assumed to be primitive, except $\leftrightarrow$ which is assumed to be defined. If the FOL tag is true, we produce a version with quantifiers, otherwise without.

-NoValue-

9.1 Rules and Derivações

fol:axd:rul:sec

Axiomatic derivações are perhaps the simplest derivação system for logic. A derivação is just a sequence of fórmulas. To count as a derivação, every fórmula in the sequence must either be an instance of an axiom, or must follow from one or more fórmulas that precede it in the sequence by a rule of inference. A derivação deriva its last fórmula.

explanation

Definição 9.1 (Derivabilidade). If Γ is a set of fórmulas of $\mathcal{L}$ then a *derivação* from Γ is a finite sequence $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ of fórmulas where for each $i \leq n$ one of the following holds:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; or
2. φ_i is an axiom; or
3. φ_i follows from some φ_j (and φ_k) with $j < i$ (and $k < i$) by a rule of inference.

What counts as a correct derivação depends on which inference rules we allow (and of course what we take to be axioms). And an inference rule is an if-then statement that tells us that, under certain conditions, a step A_i in a derivação is a correct inference step.

Definição 9.2 (Rule of inference). A *rule of inference* gives a sufficient condition for what counts as a correct inference step in a derivação from Γ.

For instance, since any one-element sequence φ with $\varphi \in \Gamma$ trivially counts as a derivação, the following might be a very simple rule of inference:

> If $\varphi \in \Gamma$, then φ is always a correct inference step in any derivação from Γ.

Similarly, if φ is one of the axioms, then φ by itself is a derivação, and so this is also a rule of inference:

> If φ is an axiom, then φ is a correct inference step.

It gets more interesting if the rule of inference appeals to fórmulas that appear before the step considered. The following rule is called *modus ponens:*

> If $\psi \to \varphi$ and ψ occur higher up in the derivação, then φ is a correct inference step.

If this is the only rule of inference, then our definition of derivação above amounts to this: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ is a derivação iff for each $i \leq n$ one of the following holds:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; or
2. φ_i is an axiom; or
3. for some $j < i$, φ_j is $\psi \to \varphi_i$, and for some $k < i$, φ_k is ψ.

The last clause says that φ_i follows from φ_j $(\psi \to \varphi_i)$ and φ_k (ψ) by modus ponens. If we can go from 1 to n, and each time we find a fórmula φ_i that is either in Γ, an axiom, or which a rule of inference tells us that it is a correct inference step, then the entire sequence counts as a correct derivação.

Definição 9.3 (Derivabilidade). A fórmula φ is *derivável* from Γ, written $\Gamma \vdash \varphi$, if there is a derivação from Γ ending in φ.

Definição 9.4 (Theorems). A fórmula φ is a *theorem* if there is a derivação of φ from the empty set. We write $\vdash \varphi$ if φ is a theorem and $\nvdash \varphi$ if it is not.

-NoValue-

9.2 Axioms and Rules for the Propositional Connectives

fol:axd:prp:sec

Definição 9.5 (Axioms). The set of Ax_0 of *axioms* for the propositional connectives comprises all fórmulas of the following forms:

fol:axd:prp:ax:land1
$$(\varphi \land \psi) \to \varphi \tag{9.1}$$

fol:axd:prp:ax:land2
$$(\varphi \land \psi) \to \psi \tag{9.2}$$

fol:axd:prp:ax:land3
$$\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi)) \tag{9.3}$$

fol:axd:prp:ax:lor1
$$\varphi \to (\varphi \lor \psi) \tag{9.4}$$

fol:axd:prp:ax:lor2
$$\varphi \to (\psi \lor \varphi) \tag{9.5}$$

fol:axd:prp:ax:lor3
$$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi)) \tag{9.6}$$

fol:axd:prp:ax:lif1
$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \tag{9.7}$$

fol:axd:prp:ax:lif2
$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{9.8}$$

fol:axd:prp:ax:lnot1
$$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi) \tag{9.9}$$

fol:axd:prp:ax:lnot2
$$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi) \tag{9.10}$$

fol:axd:prp:ax:ltrue
$$\top \tag{9.11}$$

fol:axd:prp:ax:lfalse1
$$\bot \to \varphi \tag{9.12}$$

fol:axd:prp:ax:lfalse2
$$(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi \tag{9.13}$$

fol:axd:prp:ax:dne
$$\neg\neg\varphi \to \varphi \tag{9.14}$$

Definição 9.6 (Modus ponens). If ψ and $\psi \to \varphi$ already occur in a derivação, then φ is a correct inference step.

We'll abbreviate the rule modus ponens as "MP."
-NoValue-

9.3 Axioms and Rules for Quantifiers

fol:axd:qua:sec

Definição 9.7 (Axioms for quantifiers). The *axioms* governing quantifiers are all instances of the following:

fol:axd:qua:ax:q1
$$\forall x\, \psi \to \psi(t), \tag{9.15}$$

fol:axd:qua:ax:q2
$$\psi(t) \to \exists x\, \psi. \tag{9.16}$$

for any closed term t.

Definição 9.8 (Rules for quantifiers).

If $\psi \to \varphi(a)$ already occurs in the derivação and a does not occur in Γ or ψ, then $\psi \to \forall x\, \varphi(x)$ is a correct inference step.

If $\varphi(a) \to \psi$ already occurs in the derivação and a does not occur in Γ or ψ, then $\exists x\, \varphi(x) \to \psi$ is a correct inference step.

We'll abbreviate either of these by "QR."
-NoValue-

9.4 Examples of Derivações

fol:axd:pro:sec

Exemplo 9.9. Suppose we want to prove $(\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)$. Clearly, this is not an instance of any of our axioms, so we have to use the MP rule to deriva it. Our only rule is MP, which given φ and $\varphi \to \psi$ allows us to justify ψ. One strategy would be to use Eq. (9.6) with φ being $\neg\theta$, ψ being α, and χ being $\theta \to \alpha$, O.s., the instance

$$(\neg\theta \to (\theta \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha))).$$

Why? Two applications of MP yield the last part, which is what we want. And we easily see that $\neg\theta \to (\theta \to \alpha)$ is an instance of Eq. (9.10), and $\alpha \to (\theta \to \alpha)$ is an instance of Eq. (9.7). So our derivação is:

1.	$\neg\theta \to (\theta \to \alpha)$	Eq. (9.10)
2.	$(\neg\theta \to (\theta \to \alpha)) \to$ $((\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)))$	Eq. (9.6)
3.	$(\alpha \to (\theta \to \alpha)) \to ((\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha))$	1, 2, MP
4.	$\alpha \to (\theta \to \alpha)$	Eq. (9.7)
5.	$(\neg\theta \vee \alpha) \to (\theta \to \alpha)$	3, 4, MP

fol:axd:pro:ex:identity

Exemplo 9.10. Let's try to find a derivação of $\theta \to \theta$. It is not an instance of an axiom, so we have to use MP to deriva it. Eq. (9.7) is an axiom of the form $\varphi \to \psi$ to which we could apply MP. To be useful, of course, the ψ which MP would justify as a correct step in this case would have to be $\theta \to \theta$, since this is what we want to deriva. That means φ would also have to be θ, O.s., we might look at this instance of Eq. (9.7):

$$\theta \to (\theta \to \theta)$$

In order to apply MP, we would also need to justify the corresponding second premise, namely φ. But in our case, that would be θ, and we won't be able to deriva θ by itself. So we need a different strategy.

The other axiom involving just $\to$ is Eq. (9.8), O.s.,

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

We could get to the last nested conditional by applying MP twice. Again, that would mean that we want an instance of Eq. (9.8) where $\varphi \to \chi$ is $\theta \to \theta$, the fórmula we are aiming for. Then of course, φ and χ are both θ. How should we pick ψ so that both $\varphi \to (\psi \to \chi)$ and $\varphi \to \psi$, O.s., in our case $\theta \to (\psi \to \theta)$ and $\theta \to \psi$, are also derivável? Well, the first of these is already an instance of Eq. (9.7), whatever we decide ψ to be. And $\theta \to \psi$ would be another instance of Eq. (9.7) if ψ were $(\theta \to \theta)$. So, our derivação is:

1.	$\theta \to ((\theta \to \theta) \to \theta)$	Eq. (9.7)
2.	$(\theta \to ((\theta \to \theta) \to \theta)) \to$ $((\theta \to (\theta \to \theta)) \to (\theta \to \theta))$	Eq. (9.8)
3.	$(\theta \to (\theta \to \theta)) \to (\theta \to \theta)$	1, 2, MP
4.	$\theta \to (\theta \to \theta)$	Eq. (9.7)
5.	$\theta \to \theta$	3, 4, MP

fol:axd:pro:ex:chain **Exemplo 9.11.** Sometimes we want to show that there is a derivação of some fórmula from some other fórmulas Γ. For instance, let's show that we can deriva $\varphi \to \chi$ from $\Gamma = \{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\}$.

1.	$\varphi \to \psi$	Hyp
2.	$\psi \to \chi$	Hyp
3.	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$	Eq. (9.7)
4.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	2, 3, MP
5.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to$ $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	Eq. (9.8)
6.	$((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	4, 5, MP
7.	$\varphi \to \chi$	1, 6, MP

The lines labelled "Hyp" (for "hypothesis") indicate that the fórmula on that line is um membro of Γ.

fol:axd:pro:prop:chain **Proposição 9.12.** *If $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ and $\Gamma \vdash \psi \to \chi$, then $\Gamma \vdash \varphi \to \chi$*

Prova. Suppose $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ and $\Gamma \vdash \psi \to \chi$. Then there is a derivação of $\varphi \to \psi$ from Γ; and a derivação of $\psi \to \chi$ from Γ as well. Combine these into a single derivação by concatenating them. Now add lines 3–7 of the derivação in the preceding example. This is a derivação of $\varphi \to \chi$—which is the last line of the new derivação—from Γ. Note that the justifications of lines 4 and 7 remain valid if the reference to line number 1 is replaced by reference to the last line of the derivação of $\varphi \to \psi$, and reference to line number 2 by reference to the last line of the derivação of $\psi \to \chi$. □

Problema 9.1. Show that the following hold by exhibiting derivações from the axioms:

1. $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$
2. $((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
3. $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi$

-NoValue-

9.5 Derivações with Quantifiers

fol:axd:prq:sec

Exemplo 9.13. Let us give a derivação of $(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall x\, (\varphi(x) \land \psi(x))$.

First, note that

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall x\, \varphi(x)$$

is an instance of Eq. (9.1), and

$$\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(a)$$

of Eq. (9.15). So, by Proposição 9.12, we know that

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \varphi(a)$$

is derivável. Likewise, since

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall y\, \psi(y) \qquad \text{and}$$
$$\forall y\, \psi(y) \to \psi(a)$$

are instances of Eq. (9.2) and Eq. (9.15), respectively,

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \psi(a)$$

is derivable by Proposição 9.12. Using an appropriate instance of Eq. (9.3) and two applications of MP, we see that

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to (\varphi(a) \land \psi(a))$$

is derivable. We can now apply QR to obtain

$$(\forall x\, \varphi(x) \land \forall y\, \psi(y)) \to \forall x\, (\varphi(x) \land \psi(x)).$$

-NoValue-

9.6 Proof-Theoretic Notions

explanation

fol:axd:ptn:sec

Just as we've defined a number of important semantic notions (validity, entailment, satisfiability), we now define corresponding *proof-theoretic notions*. These are not defined by appeal to satisfaction of sentenças in estruturas, but by appeal to the derivabilidade or não derivabilidade of certain formulas. It was an important discovery that these notions coincide. That they do is the content of the *soundness* and *completeness theorems*.

Definição 9.14 (Derivabilidade). A fórmula φ is *derivável* from Γ, written $\Gamma \vdash \varphi$, if there is a derivação from Γ ending in φ.

Definição 9.15 (Theorems). A fórmula φ is a *theorem* if there is a derivação of φ from the empty set. We write $\vdash \varphi$ if φ is a theorem and $\nvdash \varphi$ if it is not.

Definição 9.16 (Consistency). A set Γ of fórmulas is *consistent* if and only if $\Gamma \nvdash \bot$; it is *inconsistent* otherwise.

fol:axd:ptn: prop:reflexivity

Proposição 9.17 (Reflexivity). *If $\varphi \in \Gamma$, then $\Gamma \vdash \varphi$.*

Prova. The fórmula φ by itself is a derivação of φ from Γ. □

fol:axd:ptn: prop:monotonicity

Proposição 9.18 (Monotonicity). *If $\Gamma \subseteq \Delta$ and $\Gamma \vdash \varphi$, then $\Delta \vdash \varphi$.*

Prova. Any derivação of φ from Γ is also a derivação of φ from Δ. □

fol:axd:ptn: prop:transitivity

Proposição 9.19 (Transitivity). *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, then $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*

Prova. Suppose $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$. Then there is a derivação $\psi_1, \ldots, \psi_l = \psi$ from $\{\varphi\} \cup \Delta$. Some of the steps in that derivação will be correct because of a rule which refers to a prior line $\psi_i = \varphi$. By hypothesis, there is a derivação of φ from Γ, O.s., a derivação $\varphi_1, \ldots, \varphi_k = \varphi$ where every φ_i is an axiom, um membro of Γ, or correct by a rule of inference. Now consider the sequence

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k = \varphi, \psi_1, \ldots, \psi_l = \psi.$$

This is a correct derivação of ψ from $\Gamma \cup \Delta$ since every $B_i = \varphi$ is now justified by the same rule which justifies $\varphi_k = \varphi$. □

Note that this means that in particular if $\Gamma \vdash \varphi$ and $\varphi \vdash \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$. It follows also that if $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ and $\Gamma \vdash \varphi_i$ for each i, then $\Gamma \vdash \psi$.

fol:axd:ptn: prop:incons

Proposição 9.20. *Γ is inconsistent iff $\Gamma \vdash \varphi$ for every φ.*

Prova. Exercise. □

Problema 9.2. Prove Proposição 9.20.

fol:axd:ptn: prop:proves-compact

Proposição 9.21 (Compactness).

1. *If $\Gamma \vdash \varphi$ then there is a finite subset $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma_0 \vdash \varphi$.*
2. *If every finite subset of Γ is consistent, then Γ is consistent.*

Prova. 1. If $\Gamma \vdash \varphi$, then there is a finite sequence of fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ so that $\varphi \equiv \varphi_n$ and each φ_i is either a logical axiom, um membro of Γ or follows from previous fórmulas by modus ponens. Take Γ_0 to be those φ_i which are in Γ. Then the derivação is likewise a derivação from Γ_0, and so $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

2. This is the contrapositive of (1) for the special case $\varphi \equiv \bot$. □

-NoValue-

9.7 The Deduction Theorem

fol:axd:ded:sec

As we've seen, giving derivações in an axiomatic system is cumbersome, and derivações may be hard to find. Rather than actually write out long lists of fórmulas, it is generally easier to argue that such derivações exist, by making use of a few simple results. We've already established three such results: Proposição 9.17 says we can always assert that $\Gamma \vdash \varphi$ when we know that $\varphi \in \Gamma$. Proposição 9.18 says that if $\Gamma \vdash \varphi$ then also $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$. And Proposição 9.19 implies that if $\Gamma \vdash \varphi$ and $\varphi \vdash \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$. Here's another simple result, a "meta"-version of modus ponens:

fol:axd:ded:prop:mp

Proposição 9.22. *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$.*

Prova. We have that $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$:

1.	φ	Hyp.
2.	$\varphi \to \psi$	Hyp.
3.	ψ	1, 2, MP

By Proposição 9.19, $\Gamma \vdash \psi$. □

The most important result we'll use in this context is the deduction theorem:

fol:axd:ded:thm:deduction-thm

Teorema 9.23 (Deduction Theorem). *$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ if and only if $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.*

Prova. The "if" direction is immediate. If $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ then also $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ by Proposição 9.18. Also, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ by Proposição 9.17. So, by Proposição 9.22, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

For the "only if" direction, we proceed by induction on the length of the derivação of ψ from $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

For the induction basis, we prove the claim for every derivação of length 1. A derivação of ψ from $\Gamma \cup \{\varphi\}$ of length 1 consists of ψ by itself; and if it is correct ψ is either $\in \Gamma \cup \{\varphi\}$ or is an axiom. If $\psi \in \Gamma$ or is an axiom, then $\Gamma \vdash \psi$. We also have that $\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ by Eq. (9.7), and Proposição 9.22 gives $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. If $\psi \in \{\varphi\}$ then $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ because the last sentença $\varphi \to \psi$ is the same as $\varphi \to \varphi$, and we have derivad that in Exemplo 9.10.

For the inductive step, suppose a derivação of ψ from $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ends with a step ψ which is justified by modus ponens. (If it is not justified by modus ponens, $\psi \in \Gamma$, $\psi \equiv \varphi$, or ψ is an axiom, and the same reasoning as in the induction basis applies.) Then some previous steps in the derivação are $\chi \to \psi$ and χ, for some fórmula χ, O.s., $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \to \psi$ and $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$, and the respective derivações are shorter, so the inductive hypothesis applies to them. We thus have both:

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\chi \to \psi);$$
$$\Gamma \vdash \varphi \to \chi.$$

But also

$$\Gamma \vdash (\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)),$$

by Eq. (9.8), and two applications of Proposição 9.22 give $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, as required. □

Notice how Eq. (9.7) and Eq. (9.8) were chosen precisely so that the Deduction Theorem would hold.

The following are some useful facts about derivabilidade, which we leave as exercises.

fol:axd:ded:prop:derivfacts

Proposição 9.24.

fol:axd:ded:derivfacts:a
1. $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$;

fol:axd:ded:derivfacts:b
2. *If* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ *then* $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ *(Contraposition);*

fol:axd:ded:derivfacts:c
3. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ *(Ex Falso Quodlibet, Explosion);*

fol:axd:ded:derivfacts:d
4. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ *(Double Negation Elimination);*

fol:axd:ded:derivfacts:e
5. *If* $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ *then* $\Gamma \vdash \varphi$;

Problema 9.3. Prove Proposição 9.24

-NoValue-

9.8 The Deduction Theorem with Quantifiers

fol:axd:ddq:sec

fol:axd:ddq:thm:deduction-thm-q

Teorema 9.25 (Deduction Theorem). *If* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, *then* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Prova. We again proceed by induction on the length of the derivação of ψ from $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

The proof of the induction basis is identical to that in the proof of Teorema 9.23.

For the inductive step, suppose again that the derivação of ψ from $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ends with a step ψ which is justified by an inference rule. If the inference rule is modus ponens, we proceed as in the proof of Teorema 9.23. If the inference rule is QR, we know that $\psi \equiv \chi \to \forall x\, \theta(x)$ and a fórmula of the form $\chi \to \theta(a)$ appears earlier in the derivação, where a does not occur in χ, φ, or Γ. We thus have that

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \to \theta(a),$$

and the induction hypothesis applies, O.s., we have that

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\chi \to \theta(a)).$$

By

$$\vdash (\varphi \to (\chi \to \theta(a))) \to ((\varphi \wedge \chi) \to \theta(a))$$

and modus ponens we get

$$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \chi) \to \theta(a).$$

Since the eigenvariable condition still applies, we can add a step to this derivação justified by QR, and get

$$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \chi) \to \forall x\, \theta(x).$$

We also have

$$\vdash ((\varphi \wedge \chi) \to \forall x\, \theta(x)) \to (\varphi \to (\chi \to \forall x\, \theta(x)),$$

so by modus ponens,

$$\Gamma \vdash \varphi \to (\chi \to \forall x\, \theta(x)),$$

O.s., $\Gamma \vdash \psi$.

We leave the case where ψ is justified by the rule QR, but is of the form $\exists x\, \theta(x) \to \chi$, as an exercise. □

Problema 9.4. Complete the proof of Teorema 9.25.

-NoValue-

9.9 Derivabilidade and Consistency

We will now establish a number of properties of the derivabilidade relation. They are independently interesting, but each will play a role in the proof of the completeness theorem. fol:axd:prv:sec

Proposição 9.26. *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent, then Γ is inconsistent.* fol:axd:prv:prop:provability-contr

Prova. If $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent, then $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$. By Proposição 9.17, $\Gamma \vdash \psi$ for every $\psi \in \Gamma$. Since also $\Gamma \vdash \varphi$ by hypothesis, $\Gamma \vdash \psi$ for every $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$. By Proposição 9.19, $\Gamma \vdash \bot$, O.s., Γ is inconsistent. □

Proposição 9.27. *$\Gamma \vdash \varphi$ iff $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent.* fol:axd:prv:prop:prov-incons

Prova. First suppose $\Gamma \vdash \varphi$. Then $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ by Proposição 9.18. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ by Proposição 9.17. We also have $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ by Eq. (9.10). So by two applications of Proposição 9.22, we have $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$.

Now assume $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent, O.s., $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. By the deduction theorem, $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot$. $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \bot) \to \neg\neg\varphi$ by Eq. (9.13), so $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ by Proposição 9.22. Since $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Eq. (9.14)), we have $\Gamma \vdash \varphi$ by Proposição 9.22 again. □

Problema 9.5. Prove that $\Gamma \vdash \neg\varphi$ iff $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent.

fol:axd:prv: prop:explicit-inc

Proposição 9.28. *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\neg\varphi \in \Gamma$, then Γ is inconsistent.*

Prova. $\Gamma \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ by Eq. (9.10). $\Gamma \vdash \bot$ by two applications of Proposição 9.22. □

fol:axd:prv: prop:provability-exhaustive

Proposição 9.29. *If $\Gamma \cup \{\varphi\}$ and $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ are both inconsistent, then Γ is inconsistent.*

Prova. Exercise. □

Problema 9.6. Prove Proposição 9.29

-NoValue-

9.10 Derivabilidade and the Propositional Connectives

fol:axd:ppr: sec

We establish that the derivabilidade relation $\vdash$ of axiomatic deduction is strong enough to establish some basic facts involving the propositional connectives, such as that $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ and $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (modus ponens). These facts are needed for the proof of the completeness theorem. explanation

fol:axd:ppr: prop:provability-land

Proposição 9.30.

fol:axd:ppr: prop:provability-land-left

1. *Both $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ and $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$*

fol:axd:ppr: prop:provability-land-right

2. *$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.*

Prova. 1. From Eq. (9.1) and Eq. (9.1) by modus ponens.

2. From Eq. (9.3) by two applications of modus ponens. □

fol:axd:ppr: prop:provability-lor

Proposição 9.31.

1. *$\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ is inconsistent.*

2. *Both $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ and $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.*

Prova. 1. From Eq. (9.9) we get $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$ and $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$. So by the deduction theorem, we have $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \bot$ and $\{\neg\psi\} \vdash \psi \to \bot$. From Eq. (9.6) we get $\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash (\varphi \vee \psi) \to \bot$. By the deduction theorem, $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \bot$.

2. From Eq. (9.4) and Eq. (9.5) by modus ponsens. □

Proposição 9.32. *fol:axd:ppr: prop:provability-lif*

1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$. *fol:axd:ppr: prop:provability-lif-left*
2. *Both* $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$ *and* $\psi \vdash \varphi \to \psi$. *fol:axd:ppr: prop:provability-lif-right*

Prova. 1. We can deriva:

1.	φ	Hyp
2.	$\varphi \to \psi$	Hyp
3.	ψ	1, 2, mp

2. By Eq. (9.10) and Eq. (9.7) and the deduction theorem, respectively. □

-NoValue-

9.11 Derivabilidade and the Quantifiers

explanation The completeness theorem also requires that axiomatic deductions yield the facts about $\vdash$ established in this section. *fol:axd:qpr: sec*

Teorema 9.33. *If c is a símbolo de constante not occurring in Γ or $\varphi(x)$ and $\Gamma \vdash \varphi(c)$, then $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$.* *fol:axd:qpr: thm:strong-generalization*

Prova. By the deduction theorem, $\Gamma \vdash \top \to \varphi(c)$. Since c does not occur in Γ or $\top$, we get $\Gamma \vdash \top \to \forall x\, \varphi(x)$. By the deduction theorem again, $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$. □

Proposição 9.34. *fol:axd:qpr: prop:provability-quantifiers*

1. $\varphi(t) \vdash \exists x\, \varphi(x)$.
2. $\forall x\, \varphi(x) \vdash \varphi(t)$.

Prova. 1. By Eq. (9.16) and the deduction theorem.

2. By Eq. (9.15) and the deduction theorem. □

-NoValue-

9.12 Soundness

fol:axd:sou:sec

A derivação system, such as axiomatic deduction, is *sound* if it cannot deriva things that do not actually hold. Soundness is thus a kind of guaranteed safety property for derivação systems. Depending on which proof theoretic property is in question, we would like to know for instance, that explanation

1. every derivável φ is valid;
2. if φ is derivável from some others Γ, it is also a consequence of them;
3. if a set of fórmulas Γ is inconsistent, it is unsatisfiable.

These are important properties of a derivação system. If any of them do not hold, the derivação system is deficient—it would deriva too much. Consequently, establishing the soundness of a derivação system is of the utmost importance.

Proposição 9.35. *If φ is an axiom, then $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ for each estrutura $\mathfrak{M}$ and assignment s.*

Prova. We have to verify that all the axioms are valid. For instance, here is the case for Eq. (9.15): suppose t is livre para x in φ, and assume $\mathfrak{M}, s \vDash \forall x\, \varphi$. Then by definition of satisfaction, for each $s' \sim_x s$, also $\mathfrak{M}, s' \vDash \varphi$, and in particular this holds when $s'(x) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}_s(t)$. By Proposição 3.23, $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi[t/x]$. This shows that $\mathfrak{M}, s \vDash (\forall x\, \varphi \to \varphi[t/x])$. □

fol:axd:sou:thm:soundness

Teorema 9.36 (Soundness). *If $\Gamma \vdash \varphi$ then $\Gamma \vDash \varphi$.*

Prova. By induction on the length of the derivação of φ from Γ. If there are no steps justified by inferences, then all fórmulas in the derivação are either instances of axioms or are in Γ. By the previous proposition, all the axioms are valid, and hence if φ is an axiom then $\Gamma \vDash \varphi$. If $\varphi \in \Gamma$, then trivially $\Gamma \vDash \varphi$.

If the last step of the derivação of φ is justified by modus ponens, then there are fórmulas ψ and $\psi \to \varphi$ in the derivação, and the induction hypothesis applies to the part of the derivação ending in those fórmulas (since they contain at least one fewer step justified by an inference). So, by induction hypothesis, $\Gamma \vDash \psi$ and $\Gamma \vDash \psi \to \varphi$. Then $\Gamma \vDash \varphi$ by Teorema 3.30.

Now suppose the last step is justified by QR. Then that step has the form $\chi \to \forall x\, B(x)$ and there is a preceding step $\chi \to \psi(c)$ with c not in Γ, χ, or $\forall x\, B(x)$. By induction hypothesis, $\Gamma \vDash \chi \to \psi(c)$. By Teorema 3.30, $\Gamma \cup \{\chi\} \vDash \psi(c)$.

Consider some structure $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \{\chi\}$. We need to show that $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \psi(x)$. Since $\forall x\, \psi(x)$ is a sentença, this means we have to show that for every variable assignment s, $\mathfrak{M}, s \vDash \psi(x)$ (Proposição 3.19). Since $\Gamma \cup \{\chi\}$ consists entirely of sentences, $\mathfrak{M}, s \vDash \theta$ for all $\theta \in \Gamma$ by Definição 3.11. Let $\mathfrak{M}'$ be like $\mathfrak{M}$ except that $c^{\mathfrak{M}'} = s(x)$. Since c does not occur in Γ or χ, $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma \cup \{\chi\}$ by Corolário 3.21. Since $\Gamma \cup \{\chi\} \vDash \psi(c)$, $\mathfrak{M}' \vDash B(c)$. Since $\psi(c)$

is a sentença, $\mathfrak{M}', s \vDash \psi(c)$ by Proposição 3.18. $\mathfrak{M}', s \vDash \psi(x)$ iff $\mathfrak{M}', s \vDash \psi(c)$ by Proposição 3.23 (recall that $\psi(c)$ is just $\psi(x)[c/x]$). So, $\mathfrak{M}', s \vDash \psi(x)$. Since c does not occur in $\psi(x)$, by Proposição 3.20, $\mathfrak{M}, s \vDash \psi(x)$. But s was an arbitrary variable assignment, so $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, \psi(x)$. Thus $\Gamma \cup \{\chi\} \vDash \forall x\, \psi(x)$. By Teorema 3.30, $\Gamma \vDash \chi \to \forall x\, \psi(x)$.

The case where φ is justified by QR but is of the form $\exists x\, \psi(x) \to \chi$ is left as an exercise. □

Problema 9.7. Complete the proof of Teorema 9.36.

Corolário 9.37. *If $\vdash \varphi$, then φ is valid.*

fol:axd:sou:cor:weak-soundness

Corolário 9.38. *If Γ is satisfiable, then it is consistent.*

fol:axd:sou:cor:consistency-soundness

Prova. We prove the contrapositive. Suppose that Γ is not consistent. Then $\Gamma \vdash \bot$, O.s., there is a derivação of $\bot$ from Γ. By Teorema 9.36, any estrutura $\mathfrak{M}$ that satisfies Γ must satisfy $\bot$. Since $\mathfrak{M} \nvDash \bot$ for every estrutura $\mathfrak{M}$, no $\mathfrak{M}$ can satisfy Γ, O.s., Γ is not satisfiable. □

-NoValue-

9.13 Derivações with Predicado de identidade

In order to accommodate $=$ in derivações, we simply add new axiom schemas. The definition of derivação and $\vdash$ remains the same, we just also allow the new axioms.

fol:axd:ide:sec

Definição 9.39 (Axioms for predicado de identidade).

$$t = t, \tag{9.17}$$

fol:axd:ide:ax:id1

$$t_1 = t_2 \to (\psi(t_1) \to \psi(t_2)), \tag{9.18}$$

fol:axd:ide:ax:id2

for any closed terms t, t_1, t_2.

Proposição 9.40. *The axioms Eq. (9.17) and Eq. (9.18) are valid.*

fol:axd:ide:prop:sound

Prova. Exercise. □

Problema 9.8. Prove Proposição 9.40.

Proposição 9.41. *$\Gamma \vdash t = t$, for any term t and set Γ.*

fol:axd:ide:prop:iden1

Proposição 9.42. *If $\Gamma \vdash \varphi(t_1)$ and $\Gamma \vdash t_1 = t_2$, then $\Gamma \vdash \varphi(t_2)$.*

fol:axd:ide:prop:iden2

Prova. The fórmula

$$(t_1 = t_2 \to (\varphi(t_1) \to \varphi(t_2)))$$

is an instance of Eq. (9.18). The conclusion follows by two applications of MP. □

Capítulo 10

O Teorema da Completude

10.1 Introdução

fol:com:int:sec

O teorema da completude é um dos resultados mais fundamentais sobre lógica. Ele vem em duas formulações, cuja equivalência iremos provar. Em sua primeira formulação, ele diz algo fundamental sobre a relação entre consequência semântica e nosso sistema de derivação: se a sentença φ segue de algumas sentenças Γ, então também existe a derivação que estabelece $\Gamma \vdash \varphi$. Assim, o sistema de derivação é tão forte quanto pode possivelmente ser sem provar coisas que de fato não se seguem.

Em sua segunda formulação, ele pode ser enunciado como um resultado de existência de modelo: todo conjunto consistente de sentenças é satisfatível. A consistência é uma noção da teoria da prova: ela diz que nosso sistema de derivação é incapaz de produzir certas derivações. Mas quem garante que, só porque não há derivações de um certo tipo a partir de Γ, está garantido que existe a estrutura $\mathfrak{M}$? Antes de o teorema da completude ser provado pela primeira vez — na verdade, antes de termos os sistemas de derivação que temos hoje — o grande matemático alemão David Hilbert defendia a visão de que a consistência das teorias matemáticas garante a existência dos objetos de que elas tratam. Ele colocou isso da seguinte forma em uma carta a Gottlob Frege:

> Se os axiomas dados arbitrariamente não se contradizem uns aos outros com todas as suas consequências, então eles são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem. Este é para mim o critério de verdade e existência.

Frege discordou veementemente. A segunda formulação do teorema da completude mostra que Hilbert estava certo pelo menos no sentido de que, se os axiomas são consistentes, então existe *alguma* estrutura que os torna todos verdadeiros.

Estas não são as únicas razões pelas quais o teorema da completude — ou melhor, sua prova — é importante. Ele tem uma série de consequências importantes, algumas das quais discutiremos separadamente. Por exemplo, como

toda derivação que mostra $\Gamma \vdash \varphi$ é finita e, portanto, só pode usar uma quantidade finita das sentenças em Γ, segue do teorema da completude que, se φ é uma consequência de Γ, então já é uma consequência de um subconjunto finito de Γ. Isso é chamado de *compacidade*. Equivalentemente, se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então o próprio Γ deve ser consistente.

Embora o teorema da compacidade decorra do teorema da completude pelo desvio através de derivações, também é possível usar a *prova do* teorema da completude para estabelecê-lo diretamente. Pois o que a prova faz é tomar um conjunto de sentenças com uma certa propriedade — a consistência — e construir a estrutura a partir desse conjunto que possui certas propriedades (neste caso, que ela satisfaz o conjunto). Quase exatamente a mesma construção pode ser usada para estabelecer a compacidade diretamente, partindo de conjuntos "finitamente satisfatíveis" de sentenças em vez de conjuntos consistentes. A construção também produz outras consequências, por exemplo, que todo conjunto satisfatível de sentenças tem um modelo finito ou infinitos enumeráveis. (Esse resultado é chamado de teorema de Löwenheim–Skolem.) Em geral, a construção de estruturas a partir de conjuntos de sentenças é usada com frequência em lógica, e às vezes até em filosofia.

10.2 Esboço da Prova

fol:com:out:sec

A prova do teorema da completude é um pouco complexa e, em uma primeira leitura, é fácil se perder. Então, vamos esboçar a prova. O primeiro passo é uma mudança de perspectiva, que nos permite enxergar um caminho para uma prova. Quando a completude é pensada como "sempre que $\Gamma \vDash \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$", pode ser difícil até mesmo ter uma ideia: pois, para mostrar que $\Gamma \vdash \varphi$, temos que encontrar a derivação, e não parece que a hipótese de que $\Gamma \vDash \varphi$ nos ajude nisso de alguma forma. Para alguns sistemas de prova, é possível construir diretamente a derivação, mas adotaremos uma abordagem um pouco diferente. A mudança de perspectiva necessária é esta: a completude também pode ser formulada como: "se Γ é consistente, então é satisfatível". Talvez possamos usar a informação em Γ juntamente com a hipótese de que ela é consistente para construir a estrutura que satisfaça toda sentença em Γ. Afinal, sabemos que tipo de estrutura estamos procurando: uma que seja como Γ a descreve!

Se Γ contém apenas sentenças atômicas, é fácil construir um modelo para ele. Suponha que as sentenças atômicas sejam todas da forma $P(a_1, \ldots, a_n)$ onde os a_i são símbolos de constante. Tudo o que temos a fazer é apresentar a domínio $|\mathfrak{M}|$ e uma atribuição para P de modo que $\mathfrak{M} \vDash P(a_1, \ldots, a_n)$. Mas isso não é muito difícil: faça $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$, $c_i^{\mathfrak{M}} = i$ e, para cada $P(a_1, \ldots, a_n) \in \Gamma$, coloque a tupla $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ em $P^{\mathfrak{M}}$, onde k_i é o índice do símbolo de constante a_i (isto é, $a_i \equiv c_{k_i}$).

Agora suponha que Γ contenha alguma fórmula $\neg\psi$, com ψ atômica. Poderíamos temer que a construção de $\mathfrak{M}$ interfira na possibilidade de tornar $\neg\psi$ verdadeira. Mas é aqui que entra a consistência de Γ: se $\neg\psi \in \Gamma$, então $\psi \notin \Gamma$, caso contrário Γ seria inconsistente. E se $\psi \notin \Gamma$, então, de acordo com nossa

construção de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \nvDash \psi$, logo $\mathfrak{M} \vDash \neg\psi$. Até aqui, tudo bem.

E se Γ contiver fórmulas complexas, não atômicas? Digamos que ele contenha $\varphi \wedge \psi$. Para tornar isso verdadeiro, devemos proceder como se tanto φ quanto ψ estivessem em Γ. E se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, então teremos que tornar pelo menos um deles verdadeiro, isto é, proceder como se um deles estivesse em Γ.

Isso sugere a seguinte ideia: adicionamos fórmulas adicionais a Γ de modo a (a) manter o conjunto resultante consistente e (b) garantir que, para toda sentença φ atômica possível, ou φ está no conjunto resultante, ou $\neg\varphi$ está, e (c) tais que, sempre que $\varphi \wedge \psi$ está no conjunto, então tanto φ quanto ψ também estão; se $\varphi \vee \psi$ está no conjunto, pelo menos um dentre φ ou ψ também está, etc. Continuamos fazendo isso (potencialmente para sempre). Chame o conjunto de todas as fórmulas assim adicionadas de Γ^*. Então a nossa construção acima nos forneceria a estrutura $\mathfrak{M}$ para a qual poderíamos provar, por indução, que ela satisfaz todas as sentenças em Γ^* e, portanto, também todas as sentenças em Γ, já que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Acontece que garantir (a) e (b) é suficiente. Um conjunto de sentenças para o qual (b) vale é chamado de *completo*. Assim, nossa tarefa será estender o conjunto consistente Γ a um conjunto consistente e completo Γ^*.

Há um problema neste plano: se $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$, esperaríamos poder escolher algum símbolo de constante c e adicionar $\varphi(c)$ neste processo. Mas como sabemos que sempre podemos fazer isso? Talvez tenhamos apenas alguns símbolos de constante em nossa linguagem, e, para cada um deles, tenhamos $\neg\varphi(c) \in \Gamma$. Também não podemos adicionar $\varphi(c)$, já que isso tornaria o conjunto inconsistente, e não saberíamos se $\mathfrak{M}$ tem que tornar $\varphi(c)$ ou $\neg\varphi(c)$ verdadeira. Além disso, pode acontecer de Γ conter apenas sentenças em uma linguagem que não tem símbolo de constante algum (por exemplo, a linguagem da teoria dos conjuntos).

A solução para este problema é simplesmente adicionar infinitas constantes no começo, além de sentenças que as conectam com os quantificadores da maneira correta. (Claro, temos que verificar que isso não pode introduzir uma inconsistência.)

Nossa construção original funciona bem se tivermos apenas símbolos de constante nas sentenças atômicas. Mas a linguagem também pode conter símbolos de função. Nesse caso, pode ser complicado encontrar as funções certas em $\mathbb{N}$ para atribuir a esses símbolos de função de modo a fazer tudo funcionar. Então, aqui vai outro truque: em vez de usar i para interpretar c_i, basta tomar o próprio conjunto de símbolos de constante como o domínio. Então $\mathfrak{M}$ pode atribuir cada símbolo de constante a si mesmo: $c_i^{\mathfrak{M}} = c_i$. Mas por que não ir até o fim: seja $|\mathfrak{M}|$ o conjunto de todos os *termos* da linguagem! Se fizermos isso, há uma atribuição óbvia de funções (que tomam termos como argumentos e têm termos como valores) aos símbolos de função: atribuímos ao símbolo de função f_i^n a função que, dados n termos $t_1, \ldots, t_n$ como entrada, produz o termo $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ como valor.

A última peça do quebra-cabeça é o que fazer com $=$. O símbolo de predicado $=$ tem uma interpretação fixa: $\mathfrak{M} \vDash t = t'$ se e somente se $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t')$. Agora, se ajustarmos as coisas de modo que o valor de um termo t

seja o próprio t, então esta estrutura não tornará verdadeira *nenhuma* sentença da forma $t = t'$ a menos que t e t' sejam um único e mesmo termo. E, claro, isso é um problema, já que basicamente toda teoria interessante em uma linguagem com símbolos de função terá como teoremas sentenças $t = t'$ onde t e t' não são o mesmo termo (por exemplo, em teorias da aritmética: $(\mathsf{o} + \mathsf{o}) = \mathsf{o}$). Para resolver este problema, mudamos o domínio de $\mathfrak{M}$: em vez de usar termos como os objetos em $|\mathfrak{M}|$, usamos conjuntos de termos, e cada conjunto é tal que contém todos aqueles termos que as sentenças em Γ exigem que sejam iguais. Assim, por exemplo, se Γ é uma teoria da aritmética, um desses conjuntos conterá: o, $(\mathsf{o} + \mathsf{o})$, $(\mathsf{o} \times \mathsf{o})$, etc. Este será o conjunto que atribuímos a o, e acontecerá que este conjunto também é o valor de todos os termos nele, por exemplo, também de $(\mathsf{o}+\mathsf{o})$. Portanto, a sentença $(\mathsf{o}+\mathsf{o}) = \mathsf{o}$ será verdadeira nesta estrutura revisada.

Então, aqui está o que faremos. Primeiro investigamos as propriedades dos conjuntos consistentes completos; em particular, provamos que um conjunto consistente completo contém $\varphi \wedge \psi$ se e somente se contém tanto φ quanto ψ, contém $\varphi \vee \psi$ se e somente se contém pelo menos um deles, etc. (Proposição 10.2). Em seguida, definimos e investigamos conjuntos "saturados" de sentenças. Um conjunto saturado é aquele que contém condicionais que ligam cada sentença quantificada às suas instâncias (Definição 10.5). Mostramos que qualquer conjunto consistente Γ sempre pode ser estendido a um conjunto saturado Γ' (Lema 10.6). Se um conjunto é consistente, saturado e completo, ele também tem a propriedade de conter $\exists x\, \varphi(x)$ se e somente se contém $\varphi(t)$ para algum termo fechado t e $\forall x\, \varphi(x)$ se e somente se contém $\varphi(t)$ para todo termo fechado t (Proposição 10.7). Em seguida, tomaremos o conjunto consistente saturado Γ' e mostraremos que ele pode ser estendido a um conjunto saturado, consistente e completo Γ^* (Lema 10.8). Este conjunto Γ^* é o que usaremos para definir nosso modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$. O modelo de termos tem o conjunto de termos fechados como seu domínio, e a interpretação de seus símbolos de predicado é dada pelas sentenças atômicas em Γ^* (Definição 10.9). Usaremos as propriedades dos conjuntos consistentes completos e saturados para mostrar que, de fato, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ (Lema 10.12) e, portanto, em particular, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \Gamma$. Por fim, consideraremos como definir um modelo de termos se Γ contém $=$ também (Definição 10.16) e mostraremos que ele satisfaz Γ^* (Lema 10.19).

10.3 Conjuntos Consistentes Completos de Sentenças

fol:com:ccs:sec
fol:com:ccs:def:complete-set

Definição 10.1 (Conjunto completo). Um conjunto Γ de sentenças é *completo* se e somente se, para qualquer sentença φ, ou $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.

explanation

Conjuntos completos de sentenças não deixam questões sem resposta. Para qualquer sentença φ, Γ "diz" se φ é verdadeira ou falsa. A importância dos conjuntos completos estende-se para além da prova do teorema da completude. Uma teoria que é completa e axiomatizável, por exemplo, é sempre decidível.

explanation

Conjuntos consistentes completos são importantes na prova de completude já que podemos garantir que todo conjunto consistente de sentenças Γ está contido em um conjunto consistente completo Γ^*. Um conjunto consistente completo contém, para cada sentença φ, ou φ ou sua negação $\neg\varphi$, mas não ambas. Isso é verdade em particular para sentenças atômicas, de modo que, a partir de um conjunto consistente completo em uma linguagem adequadamente expandida por símbolos de constante, podemos construir a estrutura onde a interpretação dos símbolos de predicado é definida de acordo com quais sentenças atômicas estão em Γ^*. Pode-se então mostrar que esta estrutura torna verdadeiras todas as sentenças em Γ^* (e, portanto, também todas aquelas em Γ). A prova deste último fato requer que $\neg\varphi \in \Gamma^*$ se e somente se $\varphi \notin \Gamma^*$, $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma^*$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ ou $\psi \in \Gamma^*$, etc.

No que se segue, usaremos com frequência, de modo tácito, as propriedades de reflexividade, monotonicidade e transitividade de $\vdash$ (ver Seções 6.8, 7.7, 8.7 e 9.6).

fol:com:ccs: prop:ccs

Proposição 10.2. *Suponha que Γ seja completo e consistente. Então:*

fol:com:ccs: prop:ccs-prov-in

1. *Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.*

fol:com:ccs: prop:ccs-and

2. *$\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$.*

fol:com:ccs: prop:ccs-or

3. *$\varphi \vee \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.*

fol:com:ccs: prop:ccs-if

4. *$\varphi \to \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.*

Prova. Suponhamos, para tudo o que se segue, que Γ seja completo e consistente.

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.

   Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Suponha, ao contrário, que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por Proposições 6.20, 7.20, 8.20 e 9.28, Γ é inconsistente. Isso contradiz a suposição de que Γ é consistente. Logo, não pode ser o caso que $\varphi \notin \Gamma$, de modo que $\varphi \in \Gamma$.

2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$:

   Para a direção direta, suponha $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$. Então por Proposições 6.22, 7.22, 8.22 e 9.30, item (1), $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$. Por (1), $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$, como requerido.

   Para a direção reversa, sejam $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$. Por Proposições 6.22, 7.22, 8.22 e 9.30, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. Por (1), $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$.

3. Primeiro mostramos que, se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, então $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$. Suponha $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ mas $\varphi \notin \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\varphi \in \Gamma$ e $\neg\psi \in \Gamma$. Por Proposições 6.23, 7.23, 8.23 e 9.31, item (1), Γ é inconsistente, uma contradição. Logo, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

   Para a direção reversa, suponha que $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$. Por Proposições 6.23, 7.23, 8.23 e 9.31, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. Por (1), $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, como requerido.

4. Para a direção direta, suponha $\varphi \to \psi \in \Gamma$ e suponha, ao contrário, que $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Sob essas suposições, $\varphi \to \psi \in \Gamma$ e $\varphi \in \Gamma$. Por Proposições 6.24, 7.24, 8.24 e 9.32, item (1), $\Gamma \vdash \psi$. Mas então, por (1), $\psi \in \Gamma$, contradizendo a suposição de que $\psi \notin \Gamma$.

   Para a direção reversa, considere primeiro o caso em que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por Proposições 6.24, 7.24, 8.24 e 9.32, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Novamente por (1), obtemos que $\varphi \to \psi \in \Gamma$, como requerido.

   Agora considere o caso em que $\psi \in \Gamma$. Por Proposições 6.24, 7.24, 8.24 e 9.32, item (2) novamente, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Por (1), $\varphi \to \psi \in \Gamma$. □

Problema 10.1. Complete a prova de Proposição 10.2.

10.4 Expansão de Henkin

explanation

Parte do desafio em provar o teorema da completude é que o modelo que construímos a partir de um conjunto consistente completo Γ deve tornar verdadeiras todas as fórmulas quantificadas em Γ. Para garantir isso, usamos um truque devido a Leon Henkin. Em essência, o truque consiste em expandir a linguagem por infinitos símbolos de constante e adicionar, para cada fórmula com uma variável livre $\varphi(x)$, uma fórmula da forma $\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c)$, onde c é um dos novos símbolos de constante. Quando construímos a estrutura que satisfaz Γ, isso garantirá que cada sentença existencial verdadeira tenha uma testemunha entre as novas constantes. fol:com:hen:sec

Proposição 10.3. *Se Γ é consistente em $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ é obtida de $\mathcal{L}$ adicionando-se a infinito enumerável conjunto de novos símbolos de constante d_0, d_1, ..., então Γ é consistente em $\mathcal{L}'$.* fol:com:hen:prop:lang-exp

Definição 10.4 (Conjunto saturado). Um conjunto Γ de fórmulas de uma linguagem $\mathcal{L}$ é *saturado* se e somente se, para cada fórmula $\varphi(x) \in \mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ com uma variável livre x, existe a símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$ tal que $\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c) \in \Gamma$.

A definição a seguir será usada na prova do próximo teorema.

Definição 10.5. Seja $\mathcal{L}'$ como em Proposição 10.3. Fixe uma enumeração $\varphi_0(x_0)$, $\varphi_1(x_1)$, ... de todas as fórmulas $\varphi_i(x_i)$ de $\mathcal{L}'$ nas quais uma variável (x_i) ocorre livre. Definimos as sentenças θ_n por indução sobre n. fol:com:hen:defn:henkin-exp

Seja c_0 o primeiro símbolo de constante dentre os d_i que adicionamos a $\mathcal{L}$ que não ocorre em $\varphi_0(x_0)$. Supondo que $\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}$ já tenham sido definidas, seja c_n o primeiro dentre os novos símbolos de constante d_i que não ocorre nem em $\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}$ nem em $\varphi_n(x_n)$.

Agora seja θ_n a fórmula $\exists x_n\, \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(c_n)$.

Lema 10.6. *Todo conjunto consistente Γ pode ser estendido a um conjunto saturado consistente Γ'.* fol:com:hen:lem:henkin

Prova. Dado um conjunto consistente de sentenças Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$, expanda a linguagem adicionando a infinito enumerável conjunto de novos símbolos de constante para formar $\mathcal{L}'$. Por Proposição 10.3, Γ ainda é consistente na linguagem mais rica. Além disso, seja θ_i como em Definição 10.5. Seja

$$\Gamma_0 = \Gamma$$
$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\theta_n\}$$

isto é, $\Gamma_{n+1} = \Gamma \cup \{\theta_0, \ldots, \theta_n\}$, e seja $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$. Γ' é claramente saturado.

Se Γ' fosse inconsistente, então, para algum n, Γ_n seria inconsistente (Exercício: explique por quê). Portanto, para mostrar que Γ' é consistente, basta mostrar, por indução sobre n, que cada conjunto Γ_n é consistente.

A base da indução é simplesmente a afirmação de que $\Gamma_0 = \Gamma$ é consistente, que é a hipótese do teorema. Para o passo de indução, suponha que Γ_n seja consistente mas $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ seja inconsistente. Lembre que θ_n é $\exists x_n\, \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(c_n)$, onde $\varphi_n(x_n)$ é a fórmula de $\mathcal{L}'$ com apenas a variável x_n livre. Pela maneira como escolhemos os c_n (ver Definição 10.5), c_n não ocorre em $\varphi_n(x_n)$ nem em Γ_n.

Se $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ é inconsistente, então $\Gamma_n \vdash \neg\theta_n$ e, portanto, ambos os seguintes valem:

$$\Gamma_n \vdash \exists x_n\, \varphi_n(x_n) \qquad \Gamma_n \vdash \neg\varphi_n(c_n)$$

Como c_n não ocorre em Γ_n ou em $\varphi_n(x_n)$, Teoremas 6.25, 7.25, 8.25 e 9.33 se aplica. De $\Gamma_n \vdash \neg\varphi_n(c_n)$, obtemos $\Gamma_n \vdash \forall x_n\, \neg\varphi_n(x_n)$. Assim, temos que ambos $\Gamma_n \vdash \exists x_n\, \varphi_n(x_n)$ e $\Gamma_n \vdash \forall x_n\, \neg\varphi_n(x_n)$, de modo que o próprio Γ_n é inconsistente. (Note que $\forall x_n\, \neg\varphi_n(x_n) \vdash \neg\exists x_n\, \varphi_n(x_n)$.) Contradição: supunha-se que Γ_n fosse consistente. Logo, $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ é consistente. □

explanation

Mostraremos agora que conjuntos *completos*, consistentes que são saturados têm a propriedade de que contêm uma sentença universalmente quantificada se e somente se contêm todas as suas instâncias e contêm uma sentença existencialmente quantificada se e somente se contêm pelo menos uma instância. Usaremos isso para mostrar que a estrutura que geraremos a partir de um conjunto completo, consistente, saturado torna todas as suas sentenças quantificadas verdadeiras.

fol:com:hen: prop:saturated-instances

Proposição 10.7. *Suponha que Γ seja completo, consistente e saturado.*

1. *$\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$ se e somente se $\varphi(t) \in \Gamma$ para pelo menos um termo fechado t.*

2. *$\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma$ se e somente se $\varphi(t) \in \Gamma$ para todo termo fechado t.*

Prova. 1. Suponha primeiro que $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$. Como Γ é saturado, $(\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c)) \in \Gamma$ para algum símbolo de constante c. Por Proposições 6.24, 7.24, 8.24 e 9.32, item (1), e Proposição 10.2(1), $\varphi(c) \in \Gamma$.

Para a outra direção, a saturação não é necessária: Suponha $\varphi(t) \in \Gamma$. Então $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)$ por Proposições 6.26, 7.26, 8.26 e 9.34, item (1). Por Proposição 10.2(1), $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$.

2. Suponha que $\varphi(t) \in \Gamma$ para todo termo fechado t. Por contradição, assuma $\forall x\, \varphi(x) \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma$. Por saturação, $(\exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\varphi(c)) \in \Gamma$ para algum símbolo de constante c. Por hipótese, como c é um termo fechado, $\varphi(c) \in \Gamma$. Mas isso tornaria Γ inconsistente. (Exercício: dê a derivação que mostra que

$$\neg\forall x\, \varphi(x), \exists x\, \neg\varphi(x) \to \neg\varphi(c), \varphi(c)$$

é inconsistente.)

Para a direção reversa, não precisamos de saturação: Suponha $\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma$. Então $\Gamma \vdash \varphi(t)$ por Proposições 6.26, 7.26, 8.26 e 9.34, item (2). Obtemos $\varphi(t) \in \Gamma$ por Proposição 10.2. □

10.5 Lema de Lindenbaum

explanation

Provamos agora um lema que mostra que qualquer conjunto consistente de sentenças está contido em algum conjunto de sentenças que não é apenas consistente, mas também completo. A prova funciona adicionando uma sentença de cada vez, garantindo a cada passo que o conjunto permanece consistente. Fazemos isso de modo que, para todo φ, ou φ ou $\neg\varphi$ seja adicionada em algum estágio. A união de todos os estágios dessa construção então contém ou φ ou sua negação $\neg\varphi$ e é, portanto, completa. Ela também é consistente, já que nos asseguramos, a cada estágio, de não introduzir uma inconsistência.

fol:com:lin:sec

Lema 10.8 (Lema de Lindenbaum). *Todo conjunto consistente Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$ pode ser estendido a um conjunto consistente completo Γ^*.*

fol:com:lin:lem:lindenbaum

Prova. Seja Γ consistente. Sejam φ_0, φ_1, ... uma enumeração de todas as sentenças de $\mathcal{L}$. Defina $\Gamma_0 = \Gamma$, e

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é consistente;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $\Gamma^* = \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n$.

Cada Γ_n é consistente: Γ_0 é consistente por definição. Se $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$, isso é porque este último é consistente. Se não é, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$. Temos que verificar que $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ é consistente. Suponha que não seja. Então *ambos* $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ e $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ são inconsistentes. Isso significa que Γ_n seria inconsistente por Proposições 6.21, 7.21, 8.21 e 9.29, contrariando a hipótese de indução.

Para todo n e todo $i < n$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$. Isso segue por uma simples indução sobre n. Para $n = 0$, não há $i < 0$, de modo que a afirmação vale automaticamente. Para o passo indutivo, suponha que ela seja verdadeira para n. Mostramos que, se $i < n + 1$, então $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$. Temos $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ ou $= \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ por construção. Logo $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$. Se $i < n + 1$, então $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ por hipótese indutiva (se $i < n$) ou pelo fato trivial de que $\Gamma_n \subseteq \Gamma_n$ (se $i = n$). Obtemos que $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$ por transitividade de $\subseteq$.

Disso segue que Γ^* é consistente. Eis o porquê: Seja $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ finito. Cada $\psi \in \Gamma'$ também está em Γ_i para algum i. Seja n o maior destes. Como $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ se $i \leq n$, todo $\psi \in \Gamma'$ também está $\in \Gamma_n$, isto é, $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$, e Γ_n é consistente. Assim, todo subconjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ é consistente. Por Proposições 6.17, 7.17, 8.17 e 9.21, Γ^* é consistente.

Toda sentença de $\mathrm{Frm}(\mathcal{L})$ aparece na lista usada para definir Γ^*. Se $\varphi_n \notin \Gamma^*$, então isso é porque $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ era inconsistente. Mas então $\neg\varphi_n \in \Gamma^*$, de modo que Γ^* é completo. □

10.6 Construção de um Modelo

fol:com:mod:sec

explanation

Por ora, não nos preocupamos com $=$, isto é, queremos apenas mostrar que um conjunto consistente Γ de sentenças que não contém $=$ é satisfatível. Primeiro estendemos Γ a um conjunto consistente, completo e saturado Γ^*. Nesse caso, a definição de um modelo $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ é simples: Tomamos o conjunto de termos fechados de $\mathcal{L}'$ como o domínio. Atribuímos cada símbolo de constante a si mesmo e nos asseguramos de que, mais geralmente, para todo termo fechado t, $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$. Aos símbolos de predicado são atribuídas extensões de tal forma que uma sentença atômica é verdadeira em $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ se e somente se está em Γ^*. Isso obviamente tornará verdadeiras em $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ todas as sentenças atômicas em Γ^*. As demais são verdadeiras desde que o Γ^* com que começamos seja consistente, completo e saturado.

fol:com:mod:defn:termmodel

Definição 10.9 (Modelo de termos). Seja Γ^* um conjunto consistente, completo e saturado de sentenças em uma linguagem $\mathcal{L}$. O *modelo de termos* $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ de Γ^* é a estrutura definida como segue:

1. O domínio $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$ é o conjunto de todos os termos fechados de $\mathcal{L}$.
2. A interpretação de a símbolo de constante c é o próprio c: $c^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)} = c$.
3. Ao símbolo de função f é atribuída a função que, dados como argumentos os termos fechados $t_1, \ldots, t_n$, tem como valor o termo fechado $f(t_1, \ldots, t_n)$:
$$f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$
4. Se R é um símbolo de predicado de n lugares, então
$$\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)} \text{ se e somente se } R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^*.$$

Verificaremos agora que de fato temos $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$.

Lema 10.10. *Seja $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ o modelo de termos de Definição 10.9; então $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$.*

fol:com:mod: lem:val-in-termmodel

Prova. A prova é por indução sobre t, onde o caso base, quando t é a símbolo de constante, segue diretamente da definição do modelo de termos. Para o passo de indução, assuma que $t_1, \ldots, t_n$ são termos fechados tais que $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_i) = t_i$ e que f é a símbolo de função n-ária. Então

$$\begin{aligned}\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(f(t_1, \ldots, t_n)) &= f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_n)) \\ &= f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1, \ldots, t_n) \\ &= f(t_1, \ldots, t_n),\end{aligned}$$

e, assim, por indução, isto vale para todo termo fechado t. □

explanation A estrutura $\mathfrak{M}$ pode tornar verdadeira uma sentença $\exists x\, \varphi(x)$ existencialmente quantificada sem que haja uma instância $\varphi(t)$ que ela torne verdadeira. A estrutura $\mathfrak{M}$ pode tornar verdadeiras todas as instâncias $\varphi(t)$ de uma sentença $\forall x\, \varphi(x)$ universalmente quantificada sem tornar $\forall x\, \varphi(x)$ verdadeira. Isso ocorre porque, em geral, nem todo membro de $|\mathfrak{M}|$ é o valor de um termo fechado ($\mathfrak{M}$ pode não ser coberta). Esta é a razão pela qual a relação de satisfação é definida por meio de atribuições de variáveis. Entretanto, para o nosso modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ isso não seria necessário — porque ela é coberta. Este é o conteúdo do próximo resultado.

Proposição 10.11. *Seja $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ o modelo de termos de Definição 10.9.*

fol:com:mod: prop:quant-termmodel

1. *$\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \exists x\, \varphi(x)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi(t)$ para pelo menos um termo fechado t.*
2. *$\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \forall x\, \varphi(x)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi(t)$ para todo termo fechado t.*

Prova. 1. Por Proposição 3.19, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \exists x\, \varphi(x)$ se e somente se, para pelo menos uma atribuição de variáveis s, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$. Como $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$ consiste nos termos fechados de $\mathcal{L}$, este é o caso se e somente se há pelo menos um termo fechado t tal que $s(x) = t$ e $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$. Por Proposição 3.23, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(t)$, onde $s(x) = t$. Por Proposição 3.18, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(t)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi(t)$, já que $\varphi(t)$ é uma sentença.

2. Por Proposição 3.19, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \forall x\, \varphi(x)$ se e somente se, para toda atribuição de variáveis s, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$. Lembre que $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$ consiste nos termos fechados de $\mathcal{L}$, de modo que, para todo termo fechado t, $s(x) = t$ é uma tal atribuição de variáveis, e, para qualquer atribuição de variáveis, $s(x)$ é algum termo fechado t. Por Proposição 3.23, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(x)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(t)$, onde $s(x) = t$. Por Proposição 3.18, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \vDash \varphi(t)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi(t)$, já que $\varphi(t)$ é uma sentença. □

fol:com:mod: lem:truth **Lema 10.12 (Lema da Verdade).** *Suponha que φ não contenha $=$. Então $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$.*

Prova. Provamos ambas as direções simultaneamente e por indução sobre φ.

1. $\varphi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \nvDash \bot$ por definição de satisfação. Por outro lado, $\bot \notin \Gamma^*$ já que Γ^* é consistente.

2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \top$ por definição de satisfação. Por outro lado, $\top \in \Gamma^*$ já que Γ^* é consistente e completo, e $\Gamma^* \vdash \top$.

3. $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$ se e somente se $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}$ (pela definição de satisfação) se e somente se $R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^*$ (pela construção de $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$).

4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ (por definição de satisfação). Por hipótese de indução, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ se e somente se $\psi \notin \Gamma^*$. Como Γ^* é consistente e completo, $\psi \notin \Gamma^*$ se e somente se $\neg\psi \in \Gamma^*$.

5. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se temos ambos $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \psi$ e $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \in \Gamma^*$ e $\chi \in \Gamma^*$ (pela hipótese de indução). Por Proposição 10.2(2), este é o caso se e somente se $(\psi \wedge \chi) \in \Gamma^*$.

6. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \psi$ ou $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \in \Gamma^*$ ou $\chi \in \Gamma^*$ (por hipótese de indução). Este é o caso se e somente se $(\psi \vee \chi) \in \Gamma^*$ (por Proposição 10.2(3)).

7. $\varphi \equiv \psi \to \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \nvDash \psi$ ou $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \notin \Gamma^*$ ou $\chi \in \Gamma^*$ (por hipótese de indução). Este é o caso se e somente se $(\psi \to \chi) \in \Gamma^*$ (por Proposição 10.2(4)).

8. $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \psi(t)$ para todos os termos t (Proposição 10.11). Por hipótese de indução, este é o caso se e somente se $\psi(t) \in \Gamma^*$ para todos os termos t; por Proposição 10.7, isto, por sua vez, é o caso se e somente se $\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma^*$.

9. $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \psi(t)$ para pelo menos um termo t (Proposição 10.11). Por hipótese de indução, este é o caso se e somente se $\psi(t) \in \Gamma^*$ para pelo menos um termo t. Por Proposição 10.7, isto, por sua vez, é o caso se e somente se $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma^*$. □

10.7 Identidade

explanation

A construção do modelo de termos dada na seção anterior é suficiente para estabelecer a completude da lógica de primeira ordem para conjuntos Γ que não contêm $=$. O modelo de termos satisfaz todo $\varphi \in \Gamma^*$ que não contém $=$ (e, portanto, todo $\varphi \in \Gamma$). Ele não funciona, no entanto, se $=$ está presente. A razão é que Γ^* pode então conter a sentença $t = t'$, mas no modelo de termos o valor de qualquer termo é esse próprio termo. Logo, se t e t' são termos diferentes, seus valores no modelo de termos — isto é, t e t', respectivamente — são diferentes, e assim $t = t'$ é falsa. Podemos corrigir isso, no entanto, usando uma construção conhecida como "fatoração". fol:com:ide:sec

Definição 10.13. Seja Γ^* um conjunto consistente e completo de sentenças em $\mathcal{L}$. Definimos a relação $\approx$ sobre o conjunto de termos fechados de $\mathcal{L}$ por

$$t \approx t' \quad \text{se e somente se} \quad t = t' \in \Gamma^*$$

Proposição 10.14. *A relação $\approx$ tem as seguintes propriedades:* fol:com:ide:prop:approx-equiv

1. *$\approx$ é reflexiva.*
2. *$\approx$ é simétrica.*
3. *$\approx$ é transitiva.*
4. *Se $t \approx t'$, f é a símbolo de função, e $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ são termos fechados, então*

$$f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n) \approx f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

5. *Se $t \approx t'$, R é a símbolo de predicado, e $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ são termos fechados, então*

$$R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n) \in \Gamma^* \text{ se e somente se } R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n) \in \Gamma^*.$$

Prova. Como Γ^* é consistente e completo, $t = t' \in \Gamma^*$ se e somente se $\Gamma^* \vdash t = t'$. Assim, basta mostrar o seguinte:

1. $\Gamma^* \vdash t = t$ para todos os termos fechados t.
2. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ então $\Gamma^* \vdash t' = t$.
3. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ e $\Gamma^* \vdash t' = t''$, então $\Gamma^* \vdash t = t''$.
4. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$, então

$$\Gamma^* \vdash f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, , \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n)$$

para todo símbolo de função f de n lugares e termos fechados $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$.

5. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ e $\Gamma^* \vdash R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n)$, então $\Gamma^* \vdash R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n)$ para todo símbolo de predicado R de n lugares e termos fechados t_1, …, t_{i-1}, t_{i+1}, …, t_n. □

Problema 10.2. Complete a prova de Proposição 10.14.

Definição 10.15. Suponha que Γ^* seja um conjunto consistente e completo em uma linguagem $\mathcal{L}$, t seja um termo fechado e $\approx$ como na definição anterior. Então:

$$[t]_\approx = \{t' : t' \in \mathrm{Trm}(\mathcal{L}), t \approx t'\}$$

e $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})/_\approx = \{[t]_\approx : t \in \mathrm{Trm}(\mathcal{L})\}$.

fol:com:ide: defn:term-model-factor

Definição 10.16. Seja $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Gamma^*)$ o modelo de termos para Γ^* de Definição 10.9. Então $\mathfrak{M}/_\approx$ é a seguinte estrutura:

1. $|\mathfrak{M}/_\approx| = \mathrm{Trm}(\mathcal{L})/_\approx$.
2. $c^{\mathfrak{M}/_\approx} = [c]_\approx$
3. $f^{\mathfrak{M}/_\approx}([t_1]_\approx, \ldots, [t_n]_\approx) = [f(t_1, \ldots, t_n)]_\approx$
4. $\langle [t_1]_\approx, \ldots, [t_n]_\approx \rangle \in R^{\mathfrak{M}/_\approx}$ se e somente se $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$, isto é, se e somente se $R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^*$.

explanation

Note que definimos $f^{\mathfrak{M}/_\approx}$ e $R^{\mathfrak{M}/_\approx}$ para elementos de $\mathrm{Trm}(\mathcal{L})/_\approx$ referindo-nos a eles como $[t]_\approx$, isto é, por meio de *representantes* $t \in [t]_\approx$. Temos que nos assegurar de que essas definições não dependam da escolha desses representantes, isto é, de que, para algumas outras escolhas t' que determinam as mesmas classes de equivalência ($[t]_\approx = [t']_\approx$), as definições produzam o mesmo resultado. Por exemplo, se R é um símbolo de predicado de um lugar, a última cláusula da definição diz que $[t]_\approx \in R^{\mathfrak{M}/_\approx}$ se e somente se $\mathfrak{M} \vDash R(t)$. Se, para algum outro termo t' com $t \approx t'$, $\mathfrak{M} \nvDash R(t)$, então a definição exigiria $[t']_\approx \notin R^{\mathfrak{M}/_\approx}$. Se $t \approx t'$, então $[t]_\approx = [t']_\approx$, mas não podemos ter ao mesmo tempo $[t]_\approx \in R^{\mathfrak{M}/_\approx}$ e $[t]_\approx \notin R^{\mathfrak{M}/_\approx}$. Entretanto, Proposição 10.14 garante que isso não pode acontecer.

Proposição 10.17. *$\mathfrak{M}/_\approx$ está bem definida, isto é, se t_1, …, t_n, t'_1, …, t'_n são termos fechados, e $t_i \approx t'_i$, então*

1. $[f(t_1, \ldots, t_n)]_\approx = [f(t'_1, \ldots, t'_n)]_\approx$, *isto é,*

$$f(t_1, \ldots, t_n) \approx f(t'_1, \ldots, t'_n)$$

e

2. $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_n)$ *se e somente se* $\mathfrak{M} \vDash R(t'_1, \ldots, t'_n)$, *isto é,*

$$R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^* \text{ se e somente se } R(t'_1, \ldots, t'_n) \in \Gamma^*.$$

Prova. Segue de Proposição 10.14 por indução sobre n. □

Como no caso do modelo de termos, antes de provar o lema da verdade precisamos do seguinte lema.

Lema 10.18. *Seja $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Gamma^*)$; então $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}/\approx}(t) = [t]_\approx$.* fol:com:ide: lem:val-in-termmodel-factored

Prova. A prova é similar à de Lema 10.10. □

Problema 10.3. Complete a prova de Lema 10.18.

Lema 10.19. *$\mathfrak{M}/\approx \vDash \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ para todas as sentenças φ.* fol:com:ide: lem:truth

Prova. Por indução sobre φ, exatamente como na prova de Lema 10.12. O único caso que precisa de atenção adicional é quando $\varphi \equiv t = t'$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}/\approx \vDash t = t' &\text{ se e somente se } [t]_\approx = [t']_\approx \text{ (por definição de } \mathfrak{M}/\approx)\\ &\text{se e somente se } t \approx t' \text{ (por definição de } [t]_\approx)\\ &\text{se e somente se } t = t' \in \Gamma^* \text{ (por definição de } \approx).\end{aligned}$$ □

digression Note que, embora $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ seja sempre enumerável e infinita, $\mathfrak{M}/\approx$ pode ser finita, já que pode ocorrer que haja apenas finitas classes $[t]_\approx$. Isso é de se esperar, já que Γ pode conter sentenças que exigem que qualquer estrutura na qual elas sejam verdadeiras seja finita. Por exemplo, $\forall x\, \forall y\, x = y$ é a sentença consistente, mas é satisfeita apenas em estruturas com a domínio que contém exatamente um membro.

10.8 O Teorema da Completude

explanation Vamos combinar nossos resultados: chegamos ao teorema da completude. fol:com:cth: sec

Teorema 10.20 (Teorema da Completude). *Seja Γ um conjunto de sentenças. Se Γ é consistente, então é satisfatível.* fol:com:cth: thm:completeness

Prova. Suponha que Γ seja consistente. Por Lema 10.6, existe um conjunto saturado consistente $\Gamma' \supseteq \Gamma$. Por Lema 10.8, existe um $\Gamma^* \supseteq \Gamma'$ que é consistente e completo. Como $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$, para cada fórmula $\varphi(x)$, Γ^* contém a sentença da forma $\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c)$ e, assim, Γ^* é saturado. Se Γ não contém $=$, então, por Lema 10.12, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$. Disso segue, em particular, que, para todo $\varphi \in \Gamma$, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \vDash \varphi$, de modo que Γ é satisfatível. Se Γ de fato contém $=$, então, por Lema 10.19, para todas as sentenças φ, $\mathfrak{M}/\approx \vDash \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$. Em particular, $\mathfrak{M}/\approx \vDash \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$, de modo que Γ é satisfatível. □

Corolário 10.21 (Teorema da Completude, Segunda Versão). *Para todo Γ e sentenças φ: se $\Gamma \vDash \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$.* fol:com:cth: cor:completeness

Prova. Note que os Γ em Corolário 10.21 e Teorema 10.20 são universalmente quantificados. Para nos certificarmos de que não nos confundimos, reformulemos Teorema 10.20 usando uma variável diferente: para qualquer conjunto de sentenças Δ, se Δ é consistente, então é satisfatível. Por contraposição, se Δ não é satisfatível, então Δ é inconsistente. Usaremos isso para provar o corolário.

Suponha que $\Gamma \vDash \varphi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível por Proposição 3.28. Tomando $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ como nosso Δ, a versão anterior de Teorema 10.20 nos dá que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente. Por Proposições 6.19, 7.19, 8.19 e 9.27, $\Gamma \vdash \varphi$.□

Problema 10.4. Use Corolário 10.21 para provar Teorema 10.20, mostrando assim que as duas formulações do teorema da completude são equivalentes.

Problema 10.5. Para que um sistema de derivação seja completo, suas regras devem ser fortes o suficiente para provar que todo conjunto insatisfatível é inconsistente. Quais das regras de derivação foram necessárias para provar a completude? Alguma dessas regras não é usada em nenhum lugar da prova? Para responder a essas perguntas, faça uma lista ou diagrama que mostre quais das regras de derivação foram usadas em quais resultados que levam à prova de Teorema 10.20. Certifique-se de anotar quaisquer usos tácitos de regras nessas provas.

10.9 O Teorema da Compacidade

fol:com:com:sec

Uma consequência importante do teorema da completude é o teorema da compacidade. O teorema da compacidade afirma que, se cada subconjunto *finito* de um conjunto de sentenças é satisfatível, o conjunto inteiro é satisfatível — mesmo que o próprio conjunto seja infinito. Isso está longe de ser óbvio. Não há nada que pareça descartar, ao menos à primeira vista, a possibilidade de existirem conjuntos infinitos de sentenças que sejam contraditórios, mas em que a contradição só surge, por assim dizer, do número infinito. O teorema da compacidade diz que tal cenário pode ser descartado: não existem conjuntos infinitos insatisfatíveis de sentenças tais que cada subconjunto finito deles seja satisfatível. Como o teorema da completude, ele tem uma versão relacionada à consequência lógica: se um conjunto infinito de sentenças implica algo, então já um subconjunto finito o implica.

Definição 10.22. Um conjunto Γ de fórmulas é *finitamente satisfatível* se e somente se todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito é satisfatível.

fol:com:com:thm:compactness

Teorema 10.23 (Teorema da Compacidade). *O seguinte vale para quaisquer sentenças Γ e φ:*

1. *$\Gamma \vDash \varphi$ se e somente se existe um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \vDash \varphi$.*
2. *Γ é satisfatível se e somente se é finitamente satisfatível.*

Prova. Provamos (2). Se Γ é satisfatível, então existe a estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$. É claro que essa $\mathfrak{M}$ também satisfaz todo subconjunto finito de Γ, de modo que Γ é finitamente satisfatível.

Agora suponha que Γ seja finitamente satisfatível. Então todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ é satisfatível. Pela correção (Corolários 6.31, 7.29, 8.31 e 9.38), todo subconjunto finito é consistente. Então o próprio Γ deve ser consistente por Proposições 6.17, 7.17, 8.17 e 9.21. Pela completude (Teorema 10.20), como Γ é consistente, ele é satisfatível. □

Problema 10.6. Prove (1) de Teorema 10.23.

Exemplo 10.24. Em todo modelo $\mathfrak{M}$ de uma teoria Γ, cada termo t obviamente designa um membro de $|\mathfrak{M}|$. Podemos garantir que também seja verdade que todo membro de $|\mathfrak{M}|$ seja designado por algum termo? Em outras palavras, existem teorias Γ cujos modelos são todos cobertos? O teorema da compacidade mostra que esse não é o caso se Γ tem modelos infinitos. Eis como ver isso: Seja $\mathfrak{M}$ um modelo infinito de Γ, e seja c a símbolo de constante que não está na linguagem de Γ. Seja Δ o conjunto de todas as sentenças $c \neq t$ para t um termo na linguagem $\mathcal{L}$ de Γ, isto é,

$$\Delta = \{c \neq t : t \in \mathrm{Trm}(\mathcal{L})\}.$$

Um subconjunto finito de $\Gamma \cup \Delta$ pode ser escrito como $\Gamma' \cup \Delta'$, com $\Gamma' \subseteq \Gamma$ e $\Delta' \subseteq \Delta$. Como Δ' é finito, ele pode conter apenas finitos termos. Seja $a \in |\mathfrak{M}|$ um membro de $|\mathfrak{M}|$ que não é designado por nenhum deles, e seja $\mathfrak{M}'$ a estrutura que é exatamente como $\mathfrak{M}$, mas com $c^{\mathfrak{M}'} = a$ também. Como $a \neq \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ para todo t que ocorre em Δ', $\mathfrak{M}' \vDash \Delta'$. Como $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, $\Gamma' \subseteq \Gamma$, e c não ocorre em Γ, também $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma'$. Juntando, $\mathfrak{M}' \vDash \Gamma' \cup \Delta'$ para todo subconjunto finito $\Gamma' \cup \Delta'$ de $\Gamma \cup \Delta$. Assim, todo subconjunto finito de $\Gamma \cup \Delta$ é satisfatível. Por compacidade, o próprio $\Gamma \cup \Delta$ é satisfatível. Logo, existem modelos $\mathfrak{M} \vDash \Gamma \cup \Delta$. Todo tal $\mathfrak{M}$ é um modelo de Γ, mas não é coberto, já que $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(c) \neq \mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ para todos os termos t de $\mathcal{L}$.

Exemplo 10.25. Considere a linguagem $\mathcal{L}$ contendo o símbolo de predicado $<$, símbolos de constante $\mathtt{0}$, $\mathtt{1}$, e símbolos de função $+$, $\times$, e $-$. Seja Γ o conjunto de todas as sentenças nesta linguagem verdadeiras na estrutura $\mathfrak{Q}$ com domínio $\mathbb{Q}$ e as interpretações óbvias. Γ é o conjunto de todas as sentenças de $\mathcal{L}$ verdadeiras a respeito dos números racionais. É claro que, em $\mathbb{Q}$ (e mesmo em $\mathbb{R}$), não há números r que sejam maiores que 0 mas menores que $1/k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Tal número, se existisse, seria um *infinitesimal:* não nulo, mas infinitamente pequeno. O teorema da compacidade pode ser usado para mostrar que há modelos de Γ nos quais infinitesimais existem. Não temos a símbolo de função para a divisão em nossa linguagem (a divisão por zero é indefinida, e símbolos de função têm de ser interpretadas por funções totais). Contudo, ainda podemos expressar que $r < 1/k$, já que isso ocorre se e somente se $r \cdot k < 1$. Agora seja c a símbolo de constante nova e seja Δ

$$\{\mathtt{0} < c\} \cup \{c \times \overline{k} < \mathtt{1} : k \in \mathbb{Z}^+\}$$

(onde $\overline{k} = (1 + (1 + \cdots + (1 + 1)\ldots))$ com k 1's). Para qualquer subconjunto finito Δ_0 de Δ existe um K tal que todas as sentenças $c \times \overline{k} < 1$ em Δ_0 têm $k < K$. Se expandirmos $\mathfrak{Q}$ para $\mathfrak{Q}'$ com $c^{\mathfrak{Q}'} = 1/K$ temos que $\mathfrak{Q}' \vDash \Gamma_0 \cup \Delta_0$ para qualquer $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, e assim $\Gamma \cup \Delta$ é finitamente satisfatível (Exercício: prove isso em detalhe). Por compacidade, $\Gamma \cup \Delta$ é satisfatível. Qualquer modelo $\mathfrak{S}$ de $\Gamma \cup \Delta$ contém um infinitesimal, a saber $c^{\mathfrak{S}}$.

Problema 10.7. No modelo padrão da aritmética $\mathfrak{N}$, não há membro $k \in |\mathfrak{N}|$ que satisfaça toda fórmula $\overline{n} < x$ (onde $\overline{n}$ é $0'^{\cdots'}$ com n $'$'s). Use o teorema da compacidade para mostrar que o conjunto de sentenças na linguagem da aritmética que são verdadeiras no modelo padrão da aritmética $\mathfrak{N}$ também são verdadeiras em a estrutura $\mathfrak{N}'$ que contém um membro que *de fato* satisfaz toda fórmula $\overline{n} < x$.

Exemplo 10.26. Sabemos que a lógica de primeira ordem com predicado de identidade pode expressar que o tamanho do domínio deve ter algum tamanho mínimo: A sentença $\varphi_{\geq n}$ (que diz "existem pelo menos n objetos distintos") é verdadeira apenas em estruturas onde $|\mathfrak{M}|$ tem pelo menos n objetos. Assim, se tomarmos

$$\Delta = \{\varphi_{\geq n} : n \geq 1\}$$

então qualquer modelo de Δ deve ser infinito. Desse modo, podemos garantir que uma teoria só tenha modelos infinitos adicionando Δ a ela: os modelos de $\Gamma \cup \Delta$ são todos os modelos infinitos de Γ, e apenas eles.

Portanto, a lógica de primeira ordem pode expressar a infinitude. O teorema da compacidade mostra que ela não pode expressar a finitude, no entanto. Pois suponha que algum conjunto de sentenças Λ fosse satisfeito em todas as estruturas finitas, e apenas nelas. Então $\Delta \cup \Lambda$ é finitamente satisfatível. Por quê? Suponha que $\Delta' \cup \Lambda' \subseteq \Delta \cup \Lambda$ seja finito, com $\Delta' \subseteq \Delta$ e $\Lambda' \subseteq \Lambda$. Seja n o maior número tal que $\varphi_{\geq n} \in \Delta'$. Λ, sendo satisfeito em todas as estruturas finitas, tem um modelo $\mathfrak{M}$ com um número finito de membros, mas $\geq n$ deles. Mas então $\mathfrak{M} \vDash \Delta' \cup \Lambda'$. Por compacidade, $\Delta \cup \Lambda$ tem um modelo infinito, contradizendo a suposição de que Λ é satisfeito apenas em estruturas finitas.

10.10 Uma Prova Direta do Teorema da Compacidade

fol:com:cpd:sec

Podemos provar o Teorema da Compacidade diretamente, sem apelar ao Teorema da Completude, usando as mesmas ideias da prova do teorema da completude. Na prova do Teorema da Completude, começamos com um conjunto Γ consistente de sentenças, expandimos-o para um conjunto Γ^* de sentenças consistente, saturado, e completo, e então mostramos que no modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ construído a partir de Γ^*, todas as sentenças de Γ são verdadeiras, de modo que Γ é satisfatível.

Podemos usar o mesmo método para mostrar que um conjunto finitamente satisfatível de sentenças é satisfatível. Só temos que provar as versões correspondentes dos resultados que levam ao lema da verdade, substituindo "consistente" por "finitamente satisfatível".

Proposição 10.27. *Suponha que Γ é completo e finitamente satisfatível. Então:* *fol:com:cpd: prop:fsat-ccs*

1. *$(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, tanto $\varphi \in \Gamma$ quanto $\psi \in \Gamma$.*
2. *$(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.*
3. *$(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.*

Problema 10.8. Prove Proposição 10.27. Evite o uso de $\vdash$.

Lema 10.28. *Todo conjunto finitamente satisfatível Γ pode ser estendido a um conjunto saturado finitamente satisfatível Γ'.* *fol:com:cpd: lem:fsat-henkin*

Problema 10.9. Prove Lema 10.28. (Dica: o passo crucial é mostrar que se Γ_n é finitamente satisfatível, então $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ também o é, sem qualquer apelo a derivações ou consistência.)

Proposição 10.29. *Suponha que Γ é completo, finitamente satisfatível e saturado.* *fol:com:cpd: prop:fsat-instances*

1. *$\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi(t) \in \Gamma$ para pelo menos um termo fechado t.*
2. *$\forall x\, \varphi(x) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi(t) \in \Gamma$ para todos os termos fechados t.*

Problema 10.10. Prove Proposição 10.29.

Lema 10.30. *Todo conjunto finitamente satisfatível Γ pode ser estendido a um conjunto completo e finitamente satisfatível Γ^*.* *fol:com:cpd: lem:fsat-lindenbaum*

Problema 10.11. Prove Lema 10.30. (Dica: o passo crucial é mostrar que se Γ_n é finitamente satisfatível, então ou $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ ou $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ é finitamente satisfatível.)

Teorema 10.31 (Compacidade). *Γ é satisfatível se, e somente se, é finitamente satisfatível.* *fol:com:cpd: thm:compactness-direct*

Prova. Se Γ é satisfatível, então há a estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$. É claro que esta $\mathfrak{M}$ também satisfaz todo subconjunto finito de Γ, de modo que Γ é finitamente satisfatível.

Agora suponha que Γ é finitamente satisfatível. Por Lema 10.28, há um conjunto finitamente satisfatível e saturado $\Gamma' \supseteq \Gamma$. Por Lema 10.30, Γ' pode ser estendido a um conjunto completo e finitamente satisfatível Γ^*, e Γ^* ainda é saturado. Construa o modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ como em Definição 10.9. Note que Proposição 10.11 não dependeu do fato de que Γ^* é consistente (ou completo ou saturado, aliás), mas apenas do fato de que $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ é coberta. A prova do Lema da Verdade (Lema 10.12) funciona se substituirmos referências a Proposição 10.2 e Proposição 10.7 por referências a Proposição 10.27 e Proposição 10.29 □

Problema 10.12. Escreva a prova completa do Lema da Verdade (Lema 10.12) na versão necessária para a prova de Teorema 10.31.

10.11 O Teorema de Löwenheim–Skolem

fol:com:dls:sec

O Teorema de Löwenheim–Skolem diz que se uma teoria tem um modelo infinito, então ela também tem um modelo que é no máximo infinito enumerável. Uma consequência imediata desse fato é que a lógica de primeira ordem não pode expressar que o tamanho de a estrutura é não enumerável: qualquer sentença ou conjunto de sentenças satisfeito em todas as estruturas não enumeráveis também é satisfeito em alguma estrutura enumerável.

fol:com:dls:thm:downward-ls

Teorema 10.32. *Se Γ é consistente, então ela tem um modelo enumerável, isto é, é satisfatível em a estrutura cujo domínio é finito ou infinito enumerável.*

Prova. Se Γ é consistente, a estrutura $\mathfrak{M}$ fornecida pela prova do teorema da completude tem um domínio $|\mathfrak{M}|$ que não é maior do que o conjunto dos termos da linguagem $\mathcal{L}$. Assim $\mathfrak{M}$ é no máximo infinito enumerável. □

fol:com:dls:noidentity-ls

Teorema 10.33. *Se Γ é um conjunto consistente de sentenças na linguagem da lógica de primeira ordem sem identidade, então ela tem um modelo infinito enumerável, isto é, é satisfatível em a estrutura cujo domínio é infinito e enumerável.*

Prova. Se Γ é consistente e não contém sentenças em que a identidade aparece, então a estrutura $\mathfrak{M}$ fornecida pela prova do teorema da completude tem um domínio $|\mathfrak{M}|$ idêntico ao conjunto dos termos da linguagem $\mathcal{L}'$. Assim $\mathfrak{M}$ é infinito enumerável, pois $\mathrm{Trm}(\mathcal{L}')$ o é. □

Exemplo 10.34 (Paradoxo de Skolem). A teoria dos conjuntos de Zermelo–Fraenkel **ZFC** é um arcabouço muito poderoso no qual praticamente todas as afirmações matemáticas podem ser expressas, incluindo fatos sobre os tamanhos de conjuntos. Assim, por exemplo, **ZFC** pode provar que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável, pode provar o Teorema de Cantor de que o conjunto potência de qualquer conjunto é maior do que o próprio conjunto, etc. Se **ZFC** é consistente, seus modelos são todos infinitos e, além disso, todos contêm membros sobre os quais a teoria diz que são não enumeráveis, como o elemento que torna verdadeiro o teorema de **ZFC** de que o conjunto potência dos números naturais existe. Pelo Teorema de Löwenheim–Skolem, **ZFC** também tem modelos enumeráveis—modelos que contêm conjuntos "não enumeráveis", mas que eles mesmos são enumeráveis.

Capítulo 11

Além da lógica de primeira ordem

Este capítulo, adaptado das notas de lógica de Jeremy Avigad, fornece o mais breve vislumbre de quais outros sistemas lógicos existem. Pretende ser um capítulo que sugere tópicos adicionais para estudo em um curso que não os cobre. Cada um dos tópicos mencionados aqui irá — espero — eventualmente receber seu próprio tratamento em nível de parte no Projeto Open Logic.

11.1 Visão Geral

fol:byd:int:sec

A lógica de primeira ordem não é o único sistema de lógica de interesse: há muitas extensões e variações da lógica de primeira ordem. Uma lógica normalmente consiste na especificação formal de uma linguagem, geralmente, mas nem sempre, em um sistema dedutivo e, geralmente, mas nem sempre, em uma semântica pretendida. Mas o uso técnico do termo levanta uma pergunta óbvia: o que as lógicas que não são lógicas de primeira ordem têm a ver com a palavra "lógica", usada no sentido intuitivo ou filosófico? Todos os sistemas descritos abaixo são projetados para modelar o raciocínio de uma forma ou de outra; podemos dizer o que os torna lógicos?

Não há respostas fáceis. A palavra "lógica" é usada de diferentes maneiras e em diferentes contextos, e a noção, como a de "verdade", tem sido analisada a partir de numerosos posicionamentos filosóficos. Por exemplo, pode-se considerar que o objetivo do raciocínio lógico é a determinação de quais afirmações são necessariamente verdadeiras, verdadeiras a priori, verdadeiras independentemente da interpretação dos termos não lógicos, verdadeiras em virtude de sua forma, ou verdadeiras por convenção linguística; e cada uma dessas concepções requer bastante esclarecimento. Mesmo que se restrinja a atenção ao tipo de lógica usada na matemática, há pouco acordo quanto ao seu alcance. Por

exemplo, no *Principia Mathematica*, Russell e Whitehead tentaram desenvolver a matemática com base na lógica, na tradição *logicista* iniciada por Frege. Seu sistema de lógica era uma forma de lógica de tipo superior semelhante à descrita abaixo. No final, foram forçados a introduzir axiomas que, pela maioria dos padrões, não parecem puramente lógicos (notavelmente, o axioma do infinito e o axioma da redutibilidade), mas pode-se, ainda assim, sustentar que algumas formas de raciocínio de ordem superior devem ser aceitas como lógicas. Em contraste, Quine, cuja ontologia não admite "proposições" como objetos legítimos de discurso, argumenta que a lógica de segunda ordem e a de ordem superior são realmente manifestações da teoria dos conjuntos em pele de cordeiro; em outras palavras, sistemas que envolvem quantificação sobre predicados não são puramente lógicos.

Por enquanto, é melhor deixar tais questões filosóficas para um dia chuvoso e simplesmente pensar nos sistemas abaixo como idealizações formais de vários tipos de raciocínio, lógico ou não.

11.2 Lógica de Múltiplas Ordenações

fol:byd:msl:sec

Na lógica de primeira ordem, variáveis e quantificadores variam sobre um único domínio. Mas é frequentemente útil ter vários domínios (disjuntos): por exemplo, pode-se querer ter a domínio de números, a domínio de objetos geométricos, a domínio de funções de números para números, a domínio de grupos abelianos, e assim por diante.

A lógica de múltiplas ordenações fornece esse tipo de arcabouço. Começa-se com uma lista de "ordenações"—a "ordenação" de um objeto indica o "domínio" que ele deveria habitar. Tem-se então variáveis e quantificadores para cada ordenação e (geralmente) uma predicado de identidade para cada ordenação. Funções e relações também são "tipadas" pelas ordenações dos objetos que podem receber como argumentos. Caso contrário, mantêm-se as regras usuais da lógica de primeira ordem, com versões das regras de quantificadores repetidas para cada ordenação.

Por exemplo, para estudar relações internacionais, poderíamos escolher uma linguagem com dois tipos de objetos, cidadãos franceses e cidadãos alemães. Poderíamos ter uma relação unária, "bebe vinho", para objetos da primeira ordenação; outra relação unária, "come wurst", para objetos da segunda ordenação; e uma relação binária, "forma um casal multinacional", que recebe dois argumentos, onde o primeiro argumento é da primeira ordenação e o segundo argumento é da segunda ordenação. Se usarmos variáveis a, b, c para variar sobre cidadãos franceses e x, y, z para variar sobre cidadãos alemães, então

$$\forall a \forall x[(\mathit{CasadoCom}(a,x) \to (\mathit{BebeVinho}(a) \vee \neg \mathit{ComeWurst}(x))]]$$

afirma que, se algum francês for casado com um alemão, ou o francês bebe vinho ou o alemão não come wurst.

A lógica de múltiplas ordenações pode ser embutida na lógica de primeira ordem de maneira natural, reunindo todos os objetos dos domínios de múltiplas ordenações em um único domínio de primeira ordem, usando símbolos de predicado unários para acompanhar as ordenações e relativizando quantificadores. Por exemplo, a linguagem de primeira ordem correspondente ao exemplo acima teria símbolos de predicado unários "Alemao" e "$\mathit{Frances}$", além das outras relações descritas, com os requisitos de ordenação eliminados. Um quantificador ordenado $\forall x\, \varphi$, onde x é a variável da ordenação alemã, traduz-se para

$$\forall x\, (\mathit{Alemao}(x) \to \varphi).$$

Precisamos adicionar axiomas que garantam que as ordenações sejam separadas—por exemplo, $\forall x\, \neg(\mathit{Alemao}(x) \land \mathit{Frances}(x))$—, bem como axiomas que garantam que "bebe vinho" só vale de objetos que satisfazem o símbolo de predicado $\mathit{Frances}(x)$, etc. Com essas convenções e axiomas, não é difícil mostrar que sentenças de múltiplas ordenações traduzem-se em sentenças de primeira ordem, e derivações de múltiplas ordenações traduzem-se em derivações de primeira ordem. Além disso, estruturas de múltiplas ordenações "traduzem-se" em estruturas de primeira ordem correspondentes e vice-versa, de modo que também temos um teorema de completude para a lógica de múltiplas ordenações.

11.3 Lógica de Segunda Ordem

fol:byd:sol:sec

A linguagem da lógica de segunda ordem permite quantificar não apenas sobre a domínio de indivíduos, mas também sobre relações nesse domínio. Dada uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$, para cada k adiciona-se variáveis R que variam sobre relações k-árias, e permite-se quantificação sobre essas variáveis. Se R é a variável para uma relação k-ária, e $t_1, \ldots, t_k$ são termos ordinários (de primeira ordem), $R(t_1, \ldots, t_k)$ é uma fórmula atômica. Caso contrário, o conjunto de fórmulas é definido exatamente como no caso da lógica de primeira ordem, com cláusulas adicionais para quantificação de segunda ordem. Note que temos apenas a predicado de identidade para termos de primeira ordem: se R e S são variáveis de relação de mesma aridade k, podemos definir $R = S$ como uma abreviação de

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k\, (R(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow S(x_1, \ldots, x_k)).$$

As regras para a lógica de segunda ordem simplesmente estendem as regras de quantificadores às novas variáveis de segunda ordem. Aqui, porém, é preciso ter um pouco de cuidado para explicar como essas variáveis interagem com os símbolos de predicado de $\mathcal{L}$, e com fórmulas de $\mathcal{L}$ de modo mais geral. No mínimo, variáveis de relação contam como termos, de modo que temos inferências da forma

$$\varphi(R) \vdash \exists R\, \varphi(R)$$

Mas se $\mathcal{L}$ é a linguagem da aritmética com um símbolo de relação constante $<$, também esperaríamos que a seguinte inferência fosse válida:

$$x < y \vdash \exists R\, R(x, y)$$

ou, para uma dada fórmula φ,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \vdash \exists R\, R(x_1, \ldots, x_k)$$

Mais geralmente, podemos querer permitir inferências da forma

$$\varphi[\lambda \vec{x}.\, \psi(\vec{x})/R] \vdash \exists R\, \varphi$$

onde $\varphi[\lambda \vec{x}.\, \psi(\vec{x})/R]$ denota o resultado de substituir cada fórmula atômica da forma $Rt_1, \ldots, t_k$ em φ por $\psi(t_1, \ldots, t_k)$. Esta última regra é equivalente a ter um *esquema de compreensão*, isto é, um axioma da forma

$$\exists R\, \forall x_1, \ldots, x_k\, (\varphi(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow R(x_1, \ldots, x_k)),$$

um para cada fórmula φ na linguagem de segunda ordem, em que R não é uma variável livre. (Exercício: mostre que se R for permitida em φ, esse esquema é inconsistente!)

Quando lógicos se referem aos "axiomas da lógica de segunda ordem", geralmente querem dizer a extensão mínima da lógica de primeira ordem pelas regras de quantificadores de segunda ordem juntamente com o esquema de compreensão. Mas é frequentemente interessante estudar subsistemas mais fracos desses axiomas e regras. Por exemplo, note que em toda a sua generalidade o esquema de axiomas de compreensão é *impredicativo*: ele permite afirmar a existência de uma relação $R(x_1, \ldots, x_k)$ que é "definida" por a fórmula com quantificadores de segunda ordem; e esses quantificadores variam sobre o conjunto de todas essas relações—um conjunto que inclui R em si! Por volta da virada do século XX, uma reação comum ao paradoxo de Russell foi atribuir a culpa a tais definições e evitá-las ao desenvolver os fundamentos da matemática. Se se proíbe o uso de quantificadores de segunda ordem na fórmula φ, tem-se uma forma *predicativa* de compreensão, que é um pouco mais fraca.

Do ponto de vista semântico, pode-se pensar em uma estrutura de segunda ordem como consistindo em uma estrutura de primeira ordem para a linguagem, juntamente com um conjunto de relações no domínio sobre o qual variem os quantificadores de segunda ordem (mais precisamente, para cada k há um conjunto de relações de aridade k). É claro que, se a compreensão estiver incluída no sistema de derivação, então temos o requisito adicional de que há relações suficientes na "parte de segunda ordem" para satisfazer os axiomas de compreensão—caso contrário, o sistema de derivação não é correto! Uma maneira fácil de garantir que há relações suficientes é tomar a parte de segunda ordem como consistindo de *todas* as relações sobre a parte de primeira ordem. Uma tal estrutura é chamada *plena*, e, de certo modo, é realmente a "estrutura pretendida" para a linguagem. Se restringirmos a atenção a estruturas plenas, temos o que se conhece como a semântica de segunda ordem *plena*. Nesse caso,

especificar uma estrutura reduz-se a especificar a parte de primeira ordem, pois o conteúdo da parte de segunda ordem segue disso implicitamente.

Para resumir, há certa ambiguidade ao falar de lógica de segunda ordem. Em termos do sistema de derivação, pode-se ter em mente

1. Um sistema de derivação de segunda ordem "mínimo", juntamente com alguns axiomas de compreensão.

2. O sistema de derivação de segunda ordem "padrão", com compreensão plena.

Em termos da semântica, pode interessar

1. A semântica "fraca", em que a estrutura consiste em uma parte de primeira ordem, juntamente com uma parte de segunda ordem grande o suficiente para satisfazer os axiomas de compreensão.

2. A semântica de segunda ordem "padrão", em que se consideram apenas estruturas plenas.

Quando lógicos não especificam o sistema de derivação ou a semântica que têm em mente, geralmente se referem ao segundo item de cada lista. A vantagem de usar essa semântica é que, como veremos, ela nos dá descrições categóricas de muitas estruturas matemáticas naturais; ao mesmo tempo, o sistema de derivação é bastante forte, e correto para essa semântica. A desvantagem é que o sistema de derivação *não* é completo para a semântica; de fato, *nenhum* sistema de derivação efetivamente dado é completo para a semântica plena de segunda ordem. Por outro lado, veremos que o sistema de derivação *é* completo para a semântica enfraquecida; isso implica que, se uma sentença não for demonstrável, então há *alguma* estrutura, não necessariamente a plena, na qual ela é falsa.

A linguagem da lógica de segunda ordem é bastante rica. Pode-se identificar relações unárias com subconjuntos do domínio, e assim, em particular, pode-se quantificar sobre esses conjuntos; por exemplo, pode-se expressar indução para os números naturais com um único axioma

$$\forall R\,((R(\mathsf{0}) \land \forall x\,(R(x) \to R(x'))) \to \forall x\,R(x)).$$

Se se toma a linguagem da aritmética com os símbolos $\mathsf{0}, \prime, +, \times$ e $<$, pode-se adicionar os seguintes axiomas para descrever seu comportamento:

1. $\forall x\,\neg x' = \mathsf{0}$
2. $\forall x\,\forall y\,(s(x) = s(y) \to x = y)$
3. $\forall x\,(x + \mathsf{0}) = x$
4. $\forall x\,\forall y\,(x + y') = (x + y)'$
5. $\forall x\,(x \times \mathsf{0}) = \mathsf{0}$

6. $\forall x \, \forall y \, (x \times y') = ((x \times y) + x)$

7. $\forall x \, \forall y \, (x < y \leftrightarrow \exists z \, y = (x + z'))$

Não é difícil mostrar que esses axiomas, juntamente com o axioma de indução acima, fornecem uma descrição categórica da estrutura $\mathfrak{N}$, o modelo padrão da aritmética, desde que estejamos usando a semântica plena de segunda ordem. Dada qualquer estrutura $\mathfrak{M}$ na qual esses axiomas são verdadeiros, defina uma função f de $\mathbb{N}$ para o domínio de $\mathfrak{M}$ usando recursão ordinária em $\mathbb{N}$, de modo que $f(0) = \mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$ e $f(x+1) = \prime^{\mathfrak{M}}(f(x))$. Usando indução ordinária em $\mathbb{N}$ e o fato de que os axiomas (1) e (2) valem em $\mathfrak{M}$, vemos que f é injetiva. Para ver que f é sobrejetiva, seja P o conjunto de elementos de $|\mathfrak{M}|$ que estão no alcance de f. Como $\mathfrak{M}$ é plena, P está no domínio de segunda ordem. Pela construção de f, sabemos que $\mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$ está em P, e que P é fechado sob $\prime^{\mathfrak{M}}$. O fato de que o axioma de indução vale em $\mathfrak{M}$ (em particular, para P) garante que P é igual a todo o domínio de primeira ordem de $\mathfrak{M}$. Isso mostra que f é uma bijeção. Mostrar que f é um homomorfismo não é mais difícil, usando indução ordinária em $\mathbb{N}$ repetidamente.

Em termos teórico-conjuntistas, uma função é apenas um tipo especial de relação; por exemplo, uma função unária f pode ser identificada com uma relação binária R que satisfaz $\forall x \, \exists! y \, R(x, y)$. Como resultado, pode-se também quantificar sobre funções. Usando a semântica plena, pode-se então definir a classe de estruturas infinitas como a classe de estruturas $\mathfrak{M}$ para as quais há uma função injetiva do domínio de $\mathfrak{M}$ para um subconjunto próprio de si mesma:

$$\exists f \, (\forall x \, \forall y \, (f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \exists y \, \forall x \, f(x) \neq y).$$

A negação dessa sentença define então a classe de estruturas finitas.

Além disso, pode-se definir a classe de ordens bem-fundadas, adicionando o seguinte à definição de uma ordenação linear:

$$\forall P \, (\exists x \, P(x) \to \exists x \, (P(x) \wedge \forall y \, (y < x \to \neg P(y)))).$$

Isso afirma que todo conjunto não vazio tem um elemento mínimo, módulo a identificação de "conjunto" com "relação unária". Como outro exemplo, pode-se expressar a noção de conexidade para grafos, dizendo que não há separação não trivial dos vértices em partes desconectadas:

$$\neg \exists A \, (\exists x \, A(x) \wedge \exists y \, \neg A(y) \wedge \forall w \, \forall z \, ((A(w) \wedge \neg A(z)) \to \neg R(w, z))).$$

Como mais um exemplo, pode-se tentar, como exercício, definir a classe de estruturas finitas cujo domínio tem tamanho par. De modo ainda mais impressionante, pode-se fornecer uma descrição categórica dos números reais como um corpo ordenado completo que contém os racionais.

Em suma, a lógica de segunda ordem é muito mais expressiva do que a lógica de primeira ordem. Essa é a boa notícia; agora a má. Já mencionamos que não há sistema de derivação efetivo que seja completo para a semântica plena de segunda ordem. Para o bem ou para o mal, muitas das propriedades da

lógica de primeira ordem estão ausentes, incluindo compacidade e os teoremas de Löwenheim–Skolem.

Por outro lado, se se está disposto a abrir mão da semântica plena de segunda ordem em favor da mais fraca, então o sistema de derivação mínimo de segunda ordem é completo para essa semântica. Em outras palavras, se lemos $\vdash$ como "demonstra no sistema mínimo" e $\models$ como "implica logicamente na semântica fraca", podemos mostrar que sempre que $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$. Se se quer incluir axiomas específicos de compreensão no sistema de derivação, é preciso restringir a semântica a estruturas de segunda ordem que satisfaçam esses axiomas: por exemplo, se Δ consiste em um conjunto de axiomas de compreensão (possivelmente todos eles), temos que, se $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$. Em particular, se φ não for demonstrável usando os axiomas de compreensão que estamos considerando, então há um modelo de $\neg\varphi$ no qual esses axiomas de compreensão ainda assim valem.

A maneira mais fácil de ver que o teorema de completude vale para a semântica fraca é pensar na lógica de segunda ordem como uma lógica de múltiplas ordenações, da seguinte forma. Uma ordenação é interpretada como o domínio ordinário de "primeira ordem", e então, para cada k, temos a domínio de "relações de aridade k." Tomamos a linguagem com símbolos de relação incorporados "$\mathsf{verd}_k(R, x_1, \ldots, x_k)$", destinados a afirmar que R vale de x_1, $\ldots$, x_k, onde R é uma variável da ordenação "relação k-ária" e x_1, $\ldots$, x_k são objetos da ordenação de primeira ordem.

Com essa identificação, a semântica fraca de segunda ordem é essencialmente a semântica usual da lógica de múltiplas ordenações; e já observamos que a lógica de múltiplas ordenações pode ser embutida na lógica de primeira ordem. Módulo as traduções de ida e volta, então, a concepção mais fraca de lógica de segunda ordem é realmente uma forma disfarçada de lógica de primeira ordem, em que o domínio contém tanto "objetos" quanto "relações" governados pelos axiomas apropriados.

11.4 Lógica de Ordem Superior

fol:byd:hol:sec

Passar da lógica de primeira ordem para a de segunda ordem nos permitiu falar sobre conjuntos de objetos no domínio de primeira ordem, dentro da linguagem formal. Por que parar aí? Por exemplo, a lógica de terceira ordem deveria nos permitir lidar com conjuntos de conjuntos de objetos, ou talvez até conjuntos que contenham tanto objetos quanto conjuntos de objetos. E a lógica de quarta ordem nos permitirá falar sobre conjuntos de objetos desse tipo. Como se pode imaginar, pode-se iterar essa ideia arbitrariamente.

Na prática, a lógica de ordem superior é frequentemente formulada em termos de funções em vez de relações. (Módulo as identificações naturais, essa diferença é inessencial.) Dadas algumas "ordenações" básicas A, B, C, ... (que agora chamaremos de "tipos"), podemos criar novos estipulando

> Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \to \tau$ também o é.

Pense nos tipos como "rótulos" sintáticos que classificam os objetos que queremos em nosso domínio; $\sigma \to \tau$ descreve aqueles objetos que são funções que levam objetos de tipo σ a objetos de tipo τ. Por exemplo, podemos querer ter um tipo Ω de valores de verdade, "verdadeiro" e "falso", e um tipo $\mathbb{N}$ de números naturais. Nesse caso, pode-se pensar em objetos de tipo $\mathbb{N} \to \Omega$ como relações unárias, ou subconjuntos de $\mathbb{N}$; objetos de tipo $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ são funções de números naturais para números naturais; e objetos de tipo $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ são "funcionais", isto é, funções de tipo superior que levam funções a números.

Como no caso da lógica de segunda ordem, pode-se pensar na lógica de ordem superior como uma espécie de lógica de múltiplas ordenações, em que há uma ordenação para cada tipo de objeto que queremos considerar. Mas é usualmente mais claro simplesmente definir a sintaxe da lógica de tipos superiores a partir dos fundamentos. Por exemplo, podemos definir um conjunto de tipos finitos indutivamente, da seguinte forma:

1. $\mathbb{N}$ é um tipo finito.
2. Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \to \tau$ também o é.
3. Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \times \tau$ também o é.

Intuitivamente, $\mathbb{N}$ denota o tipo dos números naturais, $\sigma \to \tau$ denota o tipo de funções de σ para τ, e $\sigma \times \tau$ denota o tipo de pares de objetos, um de σ e outro de τ. Podemos então definir um conjunto de termos indutivamente, da seguinte forma:

1. Para cada tipo σ, há um estoque de variáveis x, y, z, ... de tipo σ
2. o é um termo de tipo $\mathbb{N}$
3. S (sucessor) é um termo de tipo $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
4. Se s é um termo de tipo σ, e t é um termo de tipo $\mathbb{N} \to (\sigma \to \sigma)$, então R_{st} é um termo de tipo $\mathbb{N} \to \sigma$
5. Se s é um termo de tipo $\tau \to \sigma$ e t é um termo de tipo τ, então $s(t)$ é um termo de tipo σ
6. Se s é um termo de tipo σ e x é uma variável de tipo τ, então $\lambda x.\, s$ é um termo de tipo $\tau \to \sigma$.
7. Se s é um termo de tipo σ e t é um termo de tipo τ, então $\langle s, t \rangle$ é um termo de tipo $\sigma \times \tau$.
8. Se s é um termo de tipo $\sigma \times \tau$, então $p_1(s)$ é um termo de tipo σ e $p_2(s)$ é um termo de tipo τ.

Intuitivamente, R_{st} denota a função definida recursivamente por

$$\begin{aligned} R_{st}(0) &= s \\ R_{st}(x+1) &= t(x, R_{st}(x)), \end{aligned}$$

$\langle s, t\rangle$ denota o par cuja primeira componente é s e cuja segunda componente é t, e $p_1(s)$ e $p_2(s)$ denotam o primeiro e o segundo elementos ("projeções") de s. Finalmente, $\lambda x.\, s$ denota a função f definida por

$$f(x) = s$$

para qualquer x de tipo σ; assim o item (6) nos dá uma forma de compreensão, permitindo-nos definir funções usando termos. As fórmulas são construídas a partir de afirmações de predicado de identidade $s = t$ entre termos do mesmo tipo, dos conectivos proposicionais usuais e da quantificação de ordem superior. Pode-se então tomar os axiomas do sistema como as equações básicas que governam os termos definidos acima, juntamente com as regras usuais da lógica com quantificadores e predicado de identidade.

Se se aumenta o sistema de tipos finitos com um tipo Ω de valores de verdade, é preciso incluir axiomas que governem seu uso também. De fato, se se for astuto, pode-se eliminar fórmulas complexas inteiramente, substituindo-as por termos de tipo Ω! O sistema de prova pode então ser modificado de acordo. O resultado é essencialmente a *teoria simples dos tipos* apresentada por Alonzo Church na década de 1930.

Como no caso da lógica de segunda ordem, há diferentes versões de semântica de tipos superiores que se pode querer usar. Na versão completa, variáveis de tipo $\sigma \to \tau$ variam sobre o conjunto de *todas* as funções dos objetos de tipo σ para objetos de tipo τ. Como se pode imaginar, essa semântica é forte demais para admitir um sistema de derivação completo e efetivo. Mas pode-se considerar uma semântica mais fraca, em que a estrutura consiste em conjuntos de elementos T_τ para cada tipo τ, juntamente com operações apropriadas para aplicação, projeção, etc. Se os detalhes forem desenvolvidos corretamente, pode-se obter teoremas de completude para os tipos de sistemas de derivação descritos acima.

A lógica de ordem superior é atraente porque fornece um arcabouço no qual podemos embutir boa parte da matemática de maneira natural: a partir de $\mathbb{N}$, pode-se definir números reais, funções contínuas e assim por diante. É também particularmente atraente no contexto da lógica intuicionista, pois os tipos têm interpretações "construtivas" claras. De fato, pode-se desenvolver versões construtivas da semântica de tipos superiores (baseadas na lógica intuicionista, em vez da clássica) que esclarecem bastante essas interpretações construtivas e são, em muitos aspectos, mais interessantes do que as contrapartes clássicas.

11.5 Lógica Intuicionista

fol:byd:il:sec

Em contraste com a lógica de segunda ordem e de ordem superior, a lógica intuicionista de primeira ordem representa uma restrição da versão clássica, destinada a modelar um tipo de raciocínio mais "construtivo". Os exemplos a seguir podem ilustrar algumas das motivações subjacentes.

Suponha que alguém se aproximasse de você um dia e anunciasse que havia determinado um número natural x, com a propriedade de que se x é primo, a

hipótese de Riemann é verdadeira, e se x é composto, a hipótese de Riemann é falsa. Ótimas notícias! Se a hipótese de Riemann é verdadeira ou não é uma das grandes questões em aberto da matemática, e aqui parecem ter reduzido o problema a um cálculo, isto é, à determinação de se um número específico é primo ou não.

Qual é o valor mágico de x? Eles o descrevem assim: x é o número natural que é igual a 7 se a hipótese de Riemann é verdadeira, e 9 caso contrário.

Com raiva, você exige seu dinheiro de volta. De um ponto de vista clássico, a descrição acima de fato determina um valor único de x; mas o que você realmente quer é um valor de x que seja dado *explicitamente*.

Para tomar outro exemplo, talvez menos artificial, considere a seguinte questão. Sabemos que é possível elevar um número irracional a uma potência racional e obter um resultado racional. Por exemplo, $\sqrt{2}^2 = 2$. O que é menos claro é se é possível elevar um número irracional a uma potência *irracional* e obter um resultado racional. O seguinte teorema responde afirmativamente:

Teorema 11.1. *Existem números irracionais a e b tais que a^b é racional.*

Prova. Considere $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se isto é racional, terminamos: podemos tomar $a = b = \sqrt{2}$. Caso contrário, é irracional. Então temos

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

que é certamente racional. Assim, neste caso, tome a como $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e b como $\sqrt{2}$.□

Isso constitui uma prova válida? A maioria dos matemáticos sente que sim. Mas, novamente, há algo um pouco insatisfatório aqui: provamos a existência de um par de números reais com uma certa propriedade, sem poder dizer *qual* par de números é. É possível provar o mesmo resultado, mas de tal forma que o par a, b *é* dado na prova: tome $a = \sqrt{3}$ e $b = \log_3 4$. Então

$$a^b = \sqrt{3}^{\log_3 4} = 3^{1/2\cdot\log_3 4} = (3^{\log_3 4})^{1/2} = 4^{1/2} = 2,$$

pois $3^{\log_3 x} = x$.

A lógica intuicionista foi concebida para modelar um tipo de raciocínio no qual movimentos como o da primeira prova são proibidos. Provar a existência de um x que satisfaz $\varphi(x)$ significa que se deve fornecer um x específico e uma prova de que ele satisfaz φ, como na segunda prova. Provar que φ ou ψ vale requer que se possa provar um ou outro.

Formalmente falando, a lógica intuicionista de primeira ordem é o que se obtém se se restringe um sistema de derivação para a lógica de primeira ordem de certa maneira. Similarmente, há versões intuicionistas da lógica de segunda ou de ordem superior. Do ponto de vista matemático, estes são apenas sistemas dedutivos formais, mas, como já observado, são destinados a modelar um tipo de raciocínio matemático. Pode-se tomar isso como o tipo de raciocínio justificado por uma certa visão filosófica da matemática (como o intuicionismo de

Brouwer); pode-se tomá-lo como um tipo de raciocínio matemático mais "concreto" e satisfatório (na linha do construtivismo de Bishop); e pode-se discutir se a descrição formal captura ou não a motivação informal. Mas quaisquer que sejam as posições filosóficas que possamos ter, podemos estudar a lógica intuicionista como uma lógica formalmente apresentada; e por quaisquer razões, muitos lógicos matemáticos acham interessante fazê-lo.

Há uma interpretação construtiva informal dos conectivos intuicionistas, usualmente conhecida como interpretação BHK (em homenagem a Brouwer, Heyting e Kolmogorov). Ela funciona assim: uma prova de $\varphi \wedge \psi$ consiste em uma prova de φ emparelhada com uma prova de B; uma prova de $\varphi \vee \psi$ consiste em uma prova de φ, ou uma prova de ψ, onde temos informação explícita sobre qual é o caso; uma prova de $\varphi \to \psi$ consiste em um procedimento que transforma uma prova de φ em uma prova de ψ; uma prova de $\forall x\, \varphi(x)$ consiste em um procedimento que retorna uma prova de $\varphi(x)$ para qualquer valor de x; e uma prova de $\exists x\, \varphi(x)$ consiste em um valor de x, juntamente com uma prova de que esse valor satisfaz φ. Pode-se descrever a interpretação em termos computacionais conhecidos como o "isomorfismo de Curry–Howard" ou o "paradigma fórmulas-como-tipos": pense em a fórmula como especificando um certo tipo de dado, e provas como objetos computacionais desses tipos de dados que nos permitem ver que a fórmula correspondente é verdadeira.

A lógica intuicionista é frequentemente pensada como a lógica clássica "menos" a lei do terceiro excluído. O seguinte teorema torna isso mais preciso.

Teorema 11.2. *Intuicionisticamente, os seguintes esquemas de axiomas são equivalentes:*

1. $(\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$.
2. $\varphi \vee \neg\varphi$
3. $\neg\neg\varphi \to \varphi$

Obter instâncias de um esquema a partir de qualquer um dos outros é um bom exercício em lógica intuicionista.

Os primeiros sistemas dedutivos para a lógica proposicional intuicionista, apresentados como formalizações do intuicionismo de Brouwer, são devidos, independentemente, a Kolmogorov, Glivenko e Heyting. A primeira formalização da lógica intuicionista de primeira ordem (e partes da matemática intuicionista) é devida a Heyting. Embora vários esquemas válidos clássicamente não sejam válidos intuicionisticamente, muitos o são.

A *tradução de dupla negação* descreve uma relação importante entre a lógica clássica e a intuicionista. Ela é definida indutivamente da seguinte forma (pense

em φ^N como a tradução "intuicionista" da fórmula clássica φ):

$$\begin{aligned}
\varphi^N &\equiv \neg\neg\varphi \quad \text{para fórmulas atômicas } \varphi \\
(\varphi \wedge \psi)^N &\equiv (\varphi^N \wedge \psi^N) \\
(\varphi \vee \psi)^N &\equiv \neg\neg(\varphi^N \vee \psi^N) \\
(\varphi \to \psi)^N &\equiv (\varphi^N \to \psi^N) \\
(\forall x\, \varphi)^N &\equiv \forall x\, \varphi^N \\
(\exists x\, \varphi)^N &\equiv \neg\neg\exists x\, \varphi^N
\end{aligned}$$

Kolmogorov e Glivenko tiveram versões dessa tradução para a lógica proposicional; para a lógica de predicados, é devida a Gödel e Gentzen, independentemente. Temos

Teorema 11.3. *1. $\varphi \leftrightarrow \varphi^N$ é demonstrável classicamente*

2. Se φ é demonstrável classicamente, então φ^N é demonstrável intuicionisticamente.

Podemos agora imaginar o seguinte diálogo. Matemático clássico: "Provei φ!" Matemático intuicionista: "Sua prova não é válida. O que você realmente provou é φ^N." Matemático clássico: "Tudo bem para mim!" Quanto ao matemático clássico, o intuicionista está apenas sendo minucioso, pois os dois são equivalentes. Mas o intuicionista insiste que há uma diferença.

Note que a tradução acima diz respeito apenas à lógica pura; ela não aborda a questão de quais são os axiomas *não lógicos* adequados para a matemática clássica e intuicionista, ou qual é a relação entre eles. Mas a seguinte extensão ligeira do teorema acima fornece alguma informação útil:

Teorema 11.4. *Se Γ prova φ classicamente, então Γ^N prova φ^N intuicionisticamente.*

Em outras palavras, se φ é demonstrável a partir de algumas hipóteses classicamente, então φ^N é demonstrável a partir de suas traduções de dupla negação.

Para mostrar que uma sentença ou fórmula proposicional é intuicionisticamente válida, basta fornecer uma prova. Mas como se pode mostrar que ela não é válida? Para esse propósito, precisamos de uma semântica que seja correta e, de preferência, completa. Uma semântica devida a Kripke se encaixa bem.

Podemos jogar o mesmo jogo que fizemos para a lógica clássica: definir a semântica e provar correção e completude. Vale a pena, no entanto, notar a seguinte distinção. No caso da lógica clássica, a semântica era a "óbvia", num sentido implícito no significado dos conectivos. Embora se possa fornecer alguma motivação intuitiva para a semântica de Kripke, esta não oferece o mesmo sentimento de inevitabilidade. Além disso, a noção de estrutura clássica é uma noção matemática natural, de modo que podemos ou tomar a noção de estrutura como uma ferramenta para estudar a lógica clássica de primeira

ordem, ou tomar a lógica clássica de primeira ordem como uma ferramenta para estudar estruturas matemáticas. Em contraste, as estruturas de Kripke só podem ser vistas como um construto lógico; elas não parecem ter interesse matemático independente.

Uma estrutura de Kripke $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ para uma linguagem proposicional consiste em um conjunto W, uma ordem parcial R em W com um menor membro, e uma atribuição "monótona" de variáveis proposicionais aos membros de W. A intuição é que os membros de W representam "mundos", ou "estados de conhecimento"; um elemento $v \geq u$ representa um "possível estado futuro" de u; e as variáveis proposicionais atribuídas a u são as proposições que se sabe serem verdadeiras no estado u. A relação de forçamento $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ estende essa relação a fórmulas arbitrárias na linguagem; leia $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ como "φ é verdadeira no estado w." A relação é definida indutivamente, da seguinte forma:

1. $\mathfrak{M}, w \Vdash p_i$ se, e somente se, p_i é uma das variáveis proposicionais atribuídas a w.
2. $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$.
3. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \wedge \psi)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ e $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$.
4. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \vee \psi)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ou $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$.
5. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \to \psi)$ se, e somente se, sempre que $w' \geq w$ e $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$, então $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$.

É um bom exercício tentar mostrar que $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$ não é intuicionisticamente válida, preparando uma estrutura de Kripke que forneça um contraexemplo.

11.6 Lógicas Modais

fol:byd:mod:sec

Considere o seguinte exemplo de uma sentença condicional:

> Se Jeremy está sozinho naquela sala, então ele está bêbado, nu e dançando nas cadeiras.

Este é um exemplo de uma asserção condicional que pode ser materialmente verdadeira, mas ainda assim enganosa, pois parece sugerir que há um vínculo mais forte entre o antecedente e a conclusão do que simplesmente o fato de que ou o antecedente é falso ou a conclusão é verdadeira. Ou seja, a formulação sugere que a afirmação não é apenas verdadeira neste mundo particular (onde pode ser trivialmente verdadeira, porque Jeremy não está sozinho na sala), mas que, além disso, a conclusão *teria sido* verdadeira *se* o antecedente tivesse sido verdadeiro. Em outras palavras, pode-se tomar a asserção como significando que a afirmação é verdadeira não apenas neste mundo, mas em qualquer mundo

"possível"; ou que ela é *necessariamente* verdadeira, em oposição a ser apenas verdadeira neste mundo particular.

A lógica modal foi concebida para dar sentido a esse tipo de necessidade. Obtém-se a lógica proposicional modal a partir da lógica proposicional ordinária adicionando um operador caixa; isto é, se φ é a fórmula, então $\Box\varphi$ também o é. Intuitivamente, $\Box\varphi$ afirma que φ é *necessariamente* verdadeira, ou verdadeira em qualquer mundo possível. $\Diamond\varphi$ é usualmente tomada como abreviação de $\neg\Box\neg\varphi$, e pode ser lida como afirmando que φ é *possivelmente* verdadeira. É claro que a modalidade também pode ser adicionada à lógica de predicados.

Estruturas de Kripke podem ser usadas para fornecer uma semântica para a lógica modal; de fato, Kripke projetou essa semântica tendo a lógica modal em mente. Em vez de restringir a ordens parciais, de modo mais geral tem-se um conjunto de "mundos possíveis", P, e uma relação binária de "acessibilidade" $R(x, y)$ entre mundos. Intuitivamente, $R(p, q)$ afirma que o mundo q é compatível com p; isto é, se estamos "em" o mundo p, temos que considerar a possibilidade de que o mundo pudesse ter sido como q.

A lógica modal é às vezes chamada de lógica "intensional", em oposição a uma "extensional". A semântica pretendida para uma lógica extensional, como a lógica clássica, refere-se apenas a um único mundo, o "atual"; enquanto a semântica para uma lógica "intensional" depende de uma ontologia mais elaborada. Além de estruturar a necessidade, pode-se usar a modalidade para estruturar outras construções linguísticas, reinterpretando $\Box$ e $\Diamond$ de acordo com a aplicação. Por exemplo:

1. Na lógica de demonstrabilidade, $\Box\varphi$ é lida como "φ é demonstrável" e $\Diamond\varphi$ é lida como "φ é consistente".

2. Na lógica epistêmica, pode-se ler $\Box\varphi$ como "eu sei φ" ou "eu acredito em φ".

3. Na lógica temporal, pode-se ler $\Box\varphi$ como "φ é sempre verdadeira" e $\Diamond\varphi$ como "φ é às vezes verdadeira".

Gostaríamos de aumentar a lógica com regras e axiomas que lidem com modalidade. Por exemplo, o sistema **S4** consiste nos axiomas e regras ordinários da lógica proposicional, juntamente com os seguintes axiomas:

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$
$$\Box\varphi \to \varphi$$
$$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

assim como uma regra, "de φ conclua $\Box\varphi$." **S5** adiciona o seguinte axioma:

$$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$$

Variações desses axiomas podem ser adequadas para diferentes aplicações; por exemplo, S5 é usualmente tomado para caracterizar a noção de necessidade

lógica. E o aspecto agradável é que se pode usualmente encontrar uma semântica para a qual o sistema de derivação é correto e completo, restringindo a relação de acessibilidade nas estruturas de Kripke de maneiras naturais. Por exemplo, **S4** corresponde à classe de estruturas de Kripke em que a relação de acessibilidade é reflexiva e transitiva. **S5** corresponde à classe de estruturas de Kripke em que a relação de acessibilidade é *universal*, isto é, todo mundo é acessível a partir de qualquer outro; assim $\Box\varphi$ vale se, e somente se, φ vale em todo mundo.

11.7 Outras Lógicas

fol:byd:oth:sec

Como você já deve ter percebido, não é difícil projetar uma nova lógica. Você também pode criar a sua própria sintaxe, montar um sistema dedutivo e elaborar uma semântica para acompanhá-la. Talvez você tenha que ser um pouco esperto se quiser que o sistema de derivação seja completo para a semântica, e pode exigir algum esforço convencer o mundo em geral de que a sua lógica é realmente interessante. Mas, em troca, você pode desfrutar de horas de diversão sadia, explorando as propriedades matemáticas e computacionais da sua lógica.

As últimas décadas testemunharam uma verdadeira explosão de lógicas formais. A lógica difusa é projetada para modelar o raciocínio sobre propriedades vagas. A lógica probabilística é projetada para modelar o raciocínio sobre a incerteza. As lógicas *default* (de exceções) e as lógicas não monotônicas são projetadas para modelar formas revogáveis de raciocínio, isto é, inferências "razoáveis" que podem mais tarde ser derrubadas diante de novas informações. Há lógicas epistêmicas, projetadas para modelar o raciocínio sobre o conhecimento; lógicas causais, projetadas para modelar o raciocínio sobre relações causais; e até mesmo lógicas "deônticas", que são projetadas para modelar o raciocínio sobre obrigações morais e éticas. Dependendo de a principal motivação para a introdução desses sistemas ser filosófica, matemática ou computacional, você pode encontrar estudos sobre essas criaturas sob a rubrica de lógica matemática, lógica filosófica, inteligência artificial, ciência cognitiva ou outro lugar.

A lista não tem fim, e as possibilidades parecem infinitas. Talvez nunca alcancemos o sonho de Leibniz de reduzir toda a razão humana a cálculo —

mas isso não pode nos impedir de tentar.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Magnus, P. D., Tim Button, J. Robert Loftis, Aaron Thomas-Bolduc, Robert Trueman, and Richard Zach. 2021. *Forall* x*: Calgary. An Introduction to Formal Logic*. Calgary: Open Logic Project, f21 ed. URL `https://forallx.openlogicproject.org/`.

Smullyan, Raymond M. 1968. *First-Order Logic*. New York, NY: Springer. Corrected reprint, New York, NY: Dover, 1995.

Zuckerman, Martin M. 1973. Formation sequences for propositional formulas. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 14(1): 134–138.