

com.1 Esboço da Prova

fol:com:out:
sec

A prova do teorema da completude é um pouco complexa e, em uma primeira leitura, é fácil se perder. Então, vamos esboçar a prova. O primeiro passo é uma mudança de perspectiva, que nos permite enxergar um caminho para uma prova. Quando a completude é pensada como “sempre que $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$ ”, pode ser difícil até mesmo ter uma ideia: pois, para mostrar que $\Gamma \vdash \varphi$, temos que encontrar a **derivação**, e não parece que a hipótese de que $\Gamma \models \varphi$ nos ajude nisso de alguma forma. Para alguns sistemas de prova, é possível construir diretamente a **derivação**, mas adotaremos uma abordagem um pouco diferente. A mudança de perspectiva necessária é esta: a completude também pode ser formulada como: “se Γ é consistente, então é satisfatível”. Talvez possamos usar a informação em Γ juntamente com a hipótese de que ela é consistente para construir a **estrutura** que satisfaça toda **sentença** em Γ . Afinal, sabemos que tipo de **estrutura** estamos procurando: uma que seja como Γ a descreve!

Se Γ contém apenas **sentenças** atômicas, é fácil construir um modelo para ele. Suponha que as **sentenças** atômicas sejam todas da forma $P(a_1, \dots, a_n)$ onde os a_i são **símbolos de constante**. Tudo o que temos a fazer é apresentar a **domínio** $|\mathfrak{M}|$ e uma atribuição para P de modo que $\mathfrak{M} \models P(a_1, \dots, a_n)$. Mas isso não é muito difícil: faça $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$, $c_i^{\mathfrak{M}} = i$ e, para cada $P(a_1, \dots, a_n) \in \Gamma$, coloque a tupla $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ em $P^{\mathfrak{M}}$, onde k_i é o índice do símbolo de constante a_i (isto é, $a_i \equiv c_{k_i}$).

Agora suponha que Γ contenha alguma **fórmula** $\neg\psi$, com ψ atômica. Poderíamos temer que a construção de $\mathfrak{M}$ interfira na possibilidade de tornar $\neg\psi$ verdadeira. Mas é aqui que entra a consistência de Γ : se $\neg\psi \in \Gamma$, então $\psi \notin \Gamma$, caso contrário Γ seria inconsistente. E se $\psi \notin \Gamma$, então, de acordo com nossa construção de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \not\models \psi$, logo $\mathfrak{M} \models \neg\psi$. Até aqui, tudo bem.

E se Γ contiver fórmulas complexas, não atômicas? Digamos que ele contenha $\varphi \wedge \psi$. Para tornar isso verdadeiro, devemos proceder como se tanto φ quanto ψ estivessem em Γ . E se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, então teremos que tornar pelo menos um deles verdadeiro, isto é, proceder como se um deles estivesse em Γ .

Isso sugere a seguinte ideia: adicionamos **fórmulas** adicionais a Γ de modo a (a) manter o conjunto resultante consistente e (b) garantir que, para toda **sentença** φ atômica possível, ou φ está no conjunto resultante, ou $\neg\varphi$ está, e (c) tais que, sempre que $\varphi \wedge \psi$ está no conjunto, então tanto φ quanto ψ também estão; se $\varphi \vee \psi$ está no conjunto, pelo menos um dentre φ ou ψ também está, etc. Continuamos fazendo isso (potencialmente para sempre). Chame o conjunto de todas as **fórmulas** assim adicionadas de Γ^* . Então a nossa construção acima nos forneceria a **estrutura** $\mathfrak{M}$ para a qual poderíamos provar, por indução, que ela satisfaz todas as sentenças em Γ^* e, portanto, também todas as sentenças em Γ , já que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Acontece que garantir (a) e (b) é suficiente. Um conjunto de sentenças para o qual (b) vale é chamado de *completo*. Assim, nossa tarefa será estender o conjunto consistente Γ a um conjunto consistente e completo Γ^* .

Há um problema neste plano: se $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$, esperaríamos poder escolher algum **símbolo de constante** c e adicionar $\varphi(c)$ neste processo. Mas como sabe-

mos que sempre podemos fazer isso? Talvez tenhamos apenas alguns **símbolos de constante** em nossa linguagem, e, para cada um deles, tenhamos $\neg\varphi(c) \in \Gamma$. Também não podemos adicionar $\varphi(c)$, já que isso tornaria o conjunto inconsistente, e não saberíamos se $\mathfrak{M}$ tem que tornar $\varphi(c)$ ou $\neg\varphi(c)$ verdadeira. Além disso, pode acontecer de Γ conter apenas sentenças em uma linguagem que não tem símbolo de constante algum (por exemplo, a linguagem da teoria dos conjuntos).

A solução para este problema é simplesmente adicionar infinitas constantes no começo, além de sentenças que as conectam com os quantificadores da maneira correta. (Claro, temos que verificar que isso não pode introduzir uma inconsistência.)

Nossa construção original funciona bem se tivermos apenas **símbolos de constante** nas sentenças atômicas. Mas a linguagem também pode conter **símbolos de função**. Nesse caso, pode ser complicado encontrar as funções certas em $\mathbb{N}$ para atribuir a esses **símbolos de função** de modo a fazer tudo funcionar. Então, aqui vai outro truque: em vez de usar i para interpretar c_i , basta tomar o próprio conjunto de **símbolos de constante** como o domínio. Então $\mathfrak{M}$ pode atribuir cada **símbolo de constante** a si mesmo: $c_i^{\mathfrak{M}} = c_i$. Mas por que não ir até o fim: seja $|\mathfrak{M}|$ o conjunto de todos os *termos* da linguagem! Se fizermos isso, há uma atribuição óbvia de funções (que tomam termos como argumentos e têm termos como valores) aos **símbolos de função**: atribuímos ao **símbolo de função** f_i^n a função que, dados n termos $t_1, \dots, t_n$ como entrada, produz o termo $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ como valor.

A última peça do quebra-cabeça é o que fazer com $=$. O **símbolo de predicado** $=$ tem uma interpretação fixa: $\mathfrak{M} \models t = t'$ se e somente se $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t')$. Agora, se ajustarmos as coisas de modo que o **valor** de um termo t seja o próprio t , então esta **estrutura** não tornará verdadeira *nenhuma* sentença da forma $t = t'$ a menos que t e t' sejam um único e mesmo termo. E, claro, isso é um problema, já que basicamente toda teoria interessante em uma linguagem com **símbolos de função** terá como teoremas sentenças $t = t'$ onde t e t' não são o mesmo termo (por exemplo, em teorias da aritmética: $(0 + 0) = 0$). Para resolver este problema, mudamos o domínio de $\mathfrak{M}$: em vez de usar termos como os objetos em $|\mathfrak{M}|$, usamos conjuntos de termos, e cada conjunto é tal que contém todos aqueles termos que as sentenças em Γ exigem que sejam iguais. Assim, por exemplo, se Γ é uma teoria da aritmética, um desses conjuntos conterá: 0 , $(0 + 0)$, (0×0) , etc. Este será o conjunto que atribuímos a 0 , e acontecerá que este conjunto também é o valor de todos os termos nele, por exemplo, também de $(0 + 0)$. Portanto, a sentença $(0 + 0) = 0$ será verdadeira nesta **estrutura** revisada.

Então, aqui está o que faremos. Primeiro investigamos as propriedades dos conjuntos consistentes **completos**; em particular, provamos que um conjunto consistente **completo** contém $\varphi \wedge \psi$ se e somente se contém tanto φ quanto ψ , contém $\varphi \vee \psi$ se e somente se contém pelo menos um deles, etc. (??). Em seguida, definimos e investigamos conjuntos “saturados” de sentenças. Um conjunto saturado é aquele que contém condicionais que ligam cada **sentença** quantificada às suas instâncias (??). Mostramos que qualquer conjunto consis-

tente Γ sempre pode ser estendido a um conjunto saturado Γ' (??). Se um conjunto é consistente, saturado e **completo**, ele também tem a propriedade de conter $\exists x \varphi(x)$ se e somente se contém $\varphi(t)$ para algum termo fechado t e $\forall x \varphi(x)$ se e somente se contém $\varphi(t)$ para todo termo fechado t (??). Em seguida, tomaremos o conjunto consistente saturado Γ' e mostraremos que ele pode ser estendido a um conjunto saturado, consistente e **completo** Γ^* (??). Este conjunto Γ^* é o que usaremos para definir nosso modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$. O modelo de termos tem o conjunto de termos fechados como seu domínio, e a interpretação de seus **símbolos de predicado** é dada pelas **sentenças** atômicas em Γ^* (??). Usaremos as propriedades dos conjuntos consistentes completos e saturados para mostrar que, de fato, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ (??) e, portanto, em particular, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \Gamma$. Por fim, consideraremos como definir um modelo de termos se Γ contém = também (??) e mostraremos que ele satisfaz Γ^* (??).

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas