

com.1 Introdução

fol:com:int:
sec

O teorema da completude é um dos resultados mais fundamentais sobre lógica. Ele vem em duas formulações, cuja equivalência iremos provar. Em sua primeira formulação, ele diz algo fundamental sobre a relação entre consequência semântica e nosso sistema de **derivação**: se a **sentença** φ segue de algumas **sentenças** Γ , então também existe a **derivação** que estabelece $\Gamma \vdash \varphi$. Assim, o sistema de **derivação** é tão forte quanto pode possivelmente ser sem provar coisas que de fato não se seguem.

Em sua segunda formulação, ele pode ser enunciado como um resultado de existência de modelo: todo conjunto consistente de **sentenças** é satisfatível. A consistência é uma noção da teoria da prova: ela diz que nosso sistema de **derivação** é incapaz de produzir certas **derivações**. Mas quem garante que, só porque não há **derivações** de um certo tipo a partir de Γ , está garantido que existe a **estrutura** $\mathfrak{M}$? Antes de o teorema da completude ser provado pela primeira vez — na verdade, antes de termos os sistemas de **derivação** que temos hoje — o grande matemático alemão David Hilbert defendia a visão de que a consistência das teorias matemáticas garante a existência dos objetos de que elas tratam. Ele colocou isso da seguinte forma em uma carta a Gottlob Frege:

Se os axiomas dados arbitrariamente não se contradizem uns aos outros com todas as suas consequências, então eles são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem. Este é para mim o critério de verdade e existência.

Frege discordou veementemente. A segunda formulação do teorema da completude mostra que Hilbert estava certo pelo menos no sentido de que, se os axiomas são consistentes, então existe *alguma* **estrutura** que os torna todos verdadeiros.

Estas não são as únicas razões pelas quais o teorema da completude — ou melhor, sua prova — é importante. Ele tem uma série de consequências importantes, algumas das quais discutiremos separadamente. Por exemplo, como toda **derivação** que mostra $\Gamma \vdash \varphi$ é finita e, portanto, só pode usar uma quantidade finita das **sentenças** em Γ , segue do teorema da completude que, se φ é uma consequência de Γ , então já é uma consequência de um subconjunto finito de Γ . Isso é chamado de *compacidade*. Equivalentemente, se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então o próprio Γ deve ser consistente.

Embora o teorema da compacidade decorra do teorema da completude pelo desvio através de **derivações**, também é possível usar a *prova do* teorema da completude para estabelecê-lo diretamente. Pois o que a prova faz é tomar um conjunto de **sentenças** com uma certa propriedade — a consistência — e construir a **estrutura** a partir desse conjunto que possui certas propriedades (neste caso, que ela satisfaz o conjunto). Quase exatamente a mesma construção pode ser usada para estabelecer a compacidade diretamente, partindo de conjuntos “finitamente satisfatíveis” de **sentenças** em vez de conjuntos consistentes. A construção também produz outras consequências, por exemplo, que todo conjunto satisfatível de **sentenças** tem um modelo finito ou **infinitos**

enumeráveis. (Esse resultado é chamado de teorema de Löwenheim–Skolem.)
Em geral, a construção de **estruturas** a partir de conjuntos de **sentenças** é usada com frequência em lógica, e às vezes até em filosofia.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas