

com.1 Identidade

fol:com:ide: sec A construção do modelo de termos dada na seção anterior é suficiente para explanation estabelecer a completude da lógica de primeira ordem para conjuntos Γ que não contêm $=$. O modelo de termos satisfaz todo $\varphi \in \Gamma^*$ que não contém $=$ (e, portanto, todo $\varphi \in \Gamma$). Ele não funciona, no entanto, se $=$ está presente. A razão é que Γ^* pode então conter **a sentença** $t = t'$, mas no modelo de termos o valor de qualquer termo é esse próprio termo. Logo, se t e t' são termos diferentes, seus valores no modelo de termos — isto é, t e t' , respectivamente — são diferentes, e assim $t = t'$ é falsa. Podemos corrigir isso, no entanto, usando uma construção conhecida como “fatoração”.

Definição com.1. Seja Γ^* um conjunto consistente e **completo** de sentenças em $\mathcal{L}$. Definimos a relação $\approx$ sobre o conjunto de termos fechados de $\mathcal{L}$ por

$$t \approx t' \quad \text{se e somente se} \quad t = t' \in \Gamma^*$$

fol:com:ide: prop:approx-equiv **Proposição com.2.** A relação $\approx$ tem as seguintes propriedades:

1. $\approx$ é reflexiva.
2. $\approx$ é simétrica.
3. $\approx$ é transitiva.
4. Se $t \approx t'$, f é **a símbolo de função**, e $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ são termos fechados, então

$$f(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \approx f(t_1, \dots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \dots, t_n).$$

5. Se $t \approx t'$, R é **a símbolo de predicado**, e $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ são termos fechados, então

$$R(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \in \Gamma^* \quad \text{se e somente se} \quad R(t_1, \dots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \dots, t_n) \in \Gamma^*.$$

Prova. Como Γ^* é consistente e **completo**, $t = t' \in \Gamma^*$ se e somente se $\Gamma^* \vdash t = t'$. Assim, basta mostrar o seguinte:

1. $\Gamma^* \vdash t = t$ para todos os termos fechados t .
2. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ então $\Gamma^* \vdash t' = t$.
3. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ e $\Gamma^* \vdash t' = t''$, então $\Gamma^* \vdash t = t''$.
4. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$, então

$$\Gamma^* \vdash f(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \dots, t_n)$$

para todo **símbolo de função** f de n lugares e termos fechados $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$.

5. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ e $\Gamma^* \vdash R(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n)$, então $\Gamma^* \vdash R(t_1, \dots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \dots, t_n)$ para todo **símbolo de predicado** R de n lugares e termos fechados $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$. $\square$

Problema com.1. Complete a prova de **Proposição com.2**.

Definição com.3. Suponha que Γ^* seja um conjunto consistente e **completo** em uma linguagem $\mathcal{L}$, t seja um termo fechado e $\approx$ como na definição anterior. Então:

$$[t]_{\approx} = \{t' : t' \in \text{Trm}(\mathcal{L}), t \approx t'\}$$

$$\text{e } \text{Trm}(\mathcal{L})/\approx = \{[t]_{\approx} : t \in \text{Trm}(\mathcal{L})\}.$$

Definição com.4. Seja $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Gamma^*)$ o modelo de termos para Γ^* de ??
Então $\mathfrak{M}/\approx$ é a seguinte **estrutura**:

fol:com:ide:
defn:term-model-factor

1. $|\mathfrak{M}/\approx| = \text{Trm}(\mathcal{L})/\approx$.
2. $c^{\mathfrak{M}/\approx} = [c]_{\approx}$
3. $f^{\mathfrak{M}/\approx}([t_1]_{\approx}, \dots, [t_n]_{\approx}) = [f(t_1, \dots, t_n)]_{\approx}$
4. $\langle [t_1]_{\approx}, \dots, [t_n]_{\approx} \rangle \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ se e somente se $\mathfrak{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$, isto é, se e somente se $R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^*$.

explanation

Note que definimos $f^{\mathfrak{M}/\approx}$ e $R^{\mathfrak{M}/\approx}$ para elementos de $\text{Trm}(\mathcal{L})/\approx$ referindo-nos a eles como $[t]_{\approx}$, isto é, por meio de *representantes* $t \in [t]_{\approx}$. Temos que nos assegurar de que essas definições não dependam da escolha desses representantes, isto é, de que, para algumas outras escolhas t' que determinam as mesmas classes de equivalência ($[t]_{\approx} = [t']_{\approx}$), as definições produzam o mesmo resultado. Por exemplo, se R é um **símbolo de predicado** de um lugar, a última cláusula da definição diz que $[t]_{\approx} \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ se e somente se $\mathfrak{M} \models R(t)$. Se, para algum outro termo t' com $t \approx t'$, $\mathfrak{M} \not\models R(t)$, então a definição exigiria $[t']_{\approx} \notin R^{\mathfrak{M}/\approx}$. Se $t \approx t'$, então $[t]_{\approx} = [t']_{\approx}$, mas não podemos ter ao mesmo tempo $[t]_{\approx} \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ e $[t]_{\approx} \notin R^{\mathfrak{M}/\approx}$. Entretanto, **Proposição com.2** garante que isso não pode acontecer.

Proposição com.5. $\mathfrak{M}/\approx$ está bem definida, isto é, se $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$ são termos fechados, e $t_i \approx t'_i$, então

1. $[f(t_1, \dots, t_n)]_{\approx} = [f(t'_1, \dots, t'_n)]_{\approx}$, isto é,

$$f(t_1, \dots, t_n) \approx f(t'_1, \dots, t'_n)$$

e

2. $\mathfrak{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$ se e somente se $\mathfrak{M} \models R(t'_1, \dots, t'_n)$, isto é,

$$R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^* \text{ se e somente se } R(t'_1, \dots, t'_n) \in \Gamma^*.$$

Prova. Segue de **Proposição com.2** por indução sobre n . $\square$

Como no caso do modelo de termos, antes de provar o lema da verdade precisamos do seguinte lema.

fol:com:ide: **Lema com.6.** *Seja $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Gamma^*)$; então $\text{Val}^{\mathfrak{M}/\approx}(t) = [t]_{\approx}$.*

lem:val-in-termmodel-factored

Prova. A prova é similar à de ???. $\square$

Problema com.2. Complete a prova de **Lema com.6**.

fol:com:ide: **Lema com.7.** $\mathfrak{M}/\approx \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ para todas as sentenças φ .

lem:truth

Prova. Por indução sobre φ , exatamente como na prova de ??. O único caso que precisa de atenção adicional é quando $\varphi \equiv t = t'$.

$\mathfrak{M}/\approx \models t = t'$ se e somente se $[t]_{\approx} = [t']_{\approx}$ (por definição de $\mathfrak{M}/\approx$)
se e somente se $t \approx t'$ (por definição de $[t]_{\approx}$)
se e somente se $t = t' \in \Gamma^*$ (por definição de $\approx$). $\square$

Note que, embora $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ seja sempre **enumerável** e infinita, $\mathfrak{M}/\approx$ pode ser finita, já que pode ocorrer que haja apenas finitas classes $[t]_{\approx}$. Isso é de se esperar, já que Γ pode conter **sentenças** que exigem que qualquer **estrutura** na qual elas sejam verdadeiras seja finita. Por exemplo, $\forall x \forall y x = y$ é **a sentença** consistente, mas é satisfeita apenas em **estruturas** com **a domínio** que contém exatamente um **membro**. digression

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas