

com.1 Expansão de Henkin

fol:com:hen: sec Parte do desafio em provar o teorema da completude é que o modelo que explanation construímos a partir de um conjunto consistente completo Γ deve tornar verdadeiras todas as **fórmulas** quantificadas em Γ . Para garantir isso, usamos um truque devido a Leon Henkin. Em essência, o truque consiste em expandir a linguagem por infinitos **símbolos de constante** e adicionar, para cada **fórmula** com uma **variável** livre $\varphi(x)$, uma fórmula da forma $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$, onde c é um dos novos **símbolos de constante**. Quando construímos a **estrutura** que satisfaz Γ , isso garantirá que cada sentença existencial verdadeira tenha uma testemunha entre as novas constantes.

fol:com:hen: prop:lang-exp **Proposição com.1.** *Se Γ é consistente em $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ é obtida de $\mathcal{L}$ adicionando-se a **infinito enumerável** conjunto de novos **símbolos de constante** $d_0, d_1, \dots$, então Γ é consistente em $\mathcal{L}'$.*

Definição com.2 (Conjunto saturado). Um conjunto Γ de **fórmulas** de uma linguagem $\mathcal{L}$ é **saturado** se e somente se, para cada **fórmula** $\varphi(x) \in \text{Frm}(\mathcal{L})$ com uma **variável** livre x , existe a **símbolo de constante** $c \in \mathcal{L}$ tal que $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \in \Gamma$.

A definição a seguir será usada na prova do próximo teorema.

fol:com:hen: defn:henkin-exp **Definição com.3.** Seja $\mathcal{L}'$ como em **Proposição com.1**. Fixe uma enumeração $\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \dots$ de todas as **fórmulas** $\varphi_i(x_i)$ de $\mathcal{L}'$ nas quais uma variável (x_i) ocorre livre. Definimos as **sentenças** θ_n por indução sobre n .

Seja c_0 o primeiro **símbolo de constante** dentre os d_i que adicionamos a $\mathcal{L}$ que não ocorre em $\varphi_0(x_0)$. Supondo que $\theta_0, \dots, \theta_{n-1}$ já tenham sido definidas, seja c_n o primeiro dentre os novos **símbolos de constante** d_i que não ocorre nem em $\theta_0, \dots, \theta_{n-1}$ nem em $\varphi_n(x_n)$.

Agora seja θ_n a **fórmula** $\exists x_n \varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi_n(c_n)$.

fol:com:hen: lem:henkin **Lema com.4.** *Todo conjunto consistente Γ pode ser estendido a um conjunto saturado consistente Γ' .*

Prova. Dado um conjunto consistente de sentenças Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$, expanda a linguagem adicionando a **infinito enumerável** conjunto de novos **símbolos de constante** para formar $\mathcal{L}'$. Por **Proposição com.1**, Γ ainda é consistente na linguagem mais rica. Além disso, seja θ_i como em **Definição com.3**. Seja

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &= \Gamma_n \cup \{\theta_n\}\end{aligned}$$

isto é, $\Gamma_{n+1} = \Gamma \cup \{\theta_0, \dots, \theta_n\}$, e seja $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$. Γ' é claramente saturado.

Se Γ' fosse inconsistente, então, para algum n , Γ_n seria inconsistente (Exercício: explique por quê). Portanto, para mostrar que Γ' é consistente, basta mostrar, por indução sobre n , que cada conjunto Γ_n é consistente.

A base da indução é simplesmente a afirmação de que $\Gamma_0 = \Gamma$ é consistente, que é a hipótese do teorema. Para o passo de indução, suponha que Γ_n seja consistente mas $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ seja inconsistente. Lembre que θ_n é $\exists x_n \varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi_n(c_n)$, onde $\varphi_n(x_n)$ é a fórmula de $\mathcal{L}'$ com apenas a variável x_n livre. Pela maneira como escolhemos os c_n (ver Definição com.3), c_n não ocorre em $\varphi_n(x_n)$ nem em Γ_n .

Se $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ é inconsistente, então $\Gamma_n \vdash \neg\theta_n$ e, portanto, ambos os seguintes valem:

$$\Gamma_n \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n) \quad \Gamma_n \vdash \neg\varphi_n(c_n)$$

Como c_n não ocorre em Γ_n ou em $\varphi_n(x_n)$, se aplica. De $\Gamma_n \vdash \neg\varphi_n(c_n)$, obtemos $\Gamma_n \vdash \forall x_n \neg\varphi_n(x_n)$. Assim, temos que ambos $\Gamma_n \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n)$ e $\Gamma_n \vdash \forall x_n \neg\varphi_n(x_n)$, de modo que o próprio Γ_n é inconsistente. (Note que $\forall x_n \neg\varphi_n(x_n) \vdash \neg\exists x_n \varphi_n(x_n)$.) Contradição: supunha-se que Γ_n fosse consistente. Logo, $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ é consistente. $\square$

explanation

Mostraremos agora que conjuntos *completos*, consistentes que são saturados têm a propriedade de que contêm uma sentença universalmente quantificada se e somente se contêm todas as suas instâncias e contêm uma sentença existencialmente quantificada se e somente se contêm pelo menos uma instância. Usaremos isso para mostrar que a estrutura que geraremos a partir de um conjunto completo, consistente, saturado torna todas as suas sentenças quantificadas verdadeiras.

Proposição com.5. *Suponha que Γ seja completo, consistente e saturado.*

fol:com:hen:
prop:saturated-instances

1. $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$ se e somente se $\varphi(t) \in \Gamma$ para pelo menos um termo fechado t .
2. $\forall x \varphi(x) \in \Gamma$ se e somente se $\varphi(t) \in \Gamma$ para todo termo fechado t .

Prova. 1. Suponha primeiro que $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$. Como Γ é saturado, $(\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)) \in \Gamma$ para algum símbolo de constante c . Por item (1), e $\varphi(c) \in \Gamma$.

Para a outra direção, a saturação não é necessária: Suponha $\varphi(t) \in \Gamma$. Então $\Gamma \vdash \exists x \varphi(x)$ por item (1). Por item (1), $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$.

2. Suponha que $\varphi(t) \in \Gamma$ para todo termo fechado t . Por contradição, assumamos $\forall x \varphi(x) \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\forall x \varphi(x) \in \Gamma$. Por saturação, $(\exists x \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(c)) \in \Gamma$ para algum símbolo de constante c . Por hipótese, como c é um termo fechado, $\varphi(c) \in \Gamma$. Mas isso tornaria Γ inconsistente. (Exercício: dê a derivação que mostra que

$$\neg\forall x \varphi(x), \exists x \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(c), \varphi(c)$$

é inconsistente.)

Para a direção reversa, não precisamos de saturação: Suponha $\forall x \varphi(x) \in \Gamma$. Então $\Gamma \vdash \varphi(t)$ por ??????????????, item (2). Obtemos $\varphi(t) \in \Gamma$ por ??.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas