

Capítulo udf

O Teorema da Completude

com.1 Introdução

fol:com:int:
sec O teorema da completude é um dos resultados mais fundamentais sobre lógica. Ele vem em duas formulações, cuja equivalência iremos provar. Em sua primeira formulação, ele diz algo fundamental sobre a relação entre consequência semântica e nosso sistema de **derivação**: se **a sentença** φ segue de algumas **sentenças** Γ , então também existe **a derivação** que estabelece $\Gamma \vdash \varphi$. Assim, o sistema de **derivação** é tão forte quanto pode possivelmente ser sem provar coisas que de fato não se seguem.

Em sua segunda formulação, ele pode ser enunciado como um resultado de existência de modelo: todo conjunto consistente de **sentenças** é satisfatível. A consistência é uma noção da teoria da prova: ela diz que nosso sistema de **derivação** é incapaz de produzir certas **derivações**. Mas quem garante que, só porque não há **derivações** de um certo tipo a partir de Γ , está garantido que existe **a estrutura** $\mathfrak{M}$? Antes de o teorema da completude ser provado pela primeira vez — na verdade, antes de termos os sistemas de **derivação** que temos hoje — o grande matemático alemão David Hilbert defendia a visão de que a consistência das teorias matemáticas garante a existência dos objetos de que elas tratam. Ele colocou isso da seguinte forma em uma carta a Gottlob Frege:

Se os axiomas dados arbitrariamente não se contradizem uns aos outros com todas as suas consequências, então eles são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem. Este é para mim o critério de verdade e existência.

Frege discordou veementemente. A segunda formulação do teorema da completude mostra que Hilbert estava certo pelo menos no sentido de que, se os axiomas são consistentes, então existe *alguma* **estrutura** que os torna todos verdadeiros.

Estas não são as únicas razões pelas quais o teorema da completude — ou melhor, sua prova — é importante. Ele tem uma série de consequências importantes, algumas das quais discutiremos separadamente. Por exemplo, como

toda **derivação** que mostra $\Gamma \vdash \varphi$ é finita e, portanto, só pode usar uma quantidade finita das **sentenças** em Γ , segue do teorema da completude que, se φ é uma consequência de Γ , então já é uma consequência de um subconjunto finito de Γ . Isso é chamado de *compacidade*. Equivalentemente, se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então o próprio Γ deve ser consistente.

Embora o teorema da compacidade decorra do teorema da completude pelo desvio através de **derivações**, também é possível usar a *prova do* teorema da completude para estabelecê-lo diretamente. Pois o que a prova faz é tomar um conjunto de **sentenças** com uma certa propriedade — a consistência — e construir a **estrutura** a partir desse conjunto que possui certas propriedades (neste caso, que ela satisfaz o conjunto). Quase exatamente a mesma construção pode ser usada para estabelecer a compacidade diretamente, partindo de conjuntos “finitamente satisfatíveis” de **sentenças** em vez de conjuntos consistentes. A construção também produz outras consequências, por exemplo, que todo conjunto satisfatível de **sentenças** tem um modelo finito ou **infinitos enumeráveis**. (Esse resultado é chamado de teorema de Löwenheim–Skolem.) Em geral, a construção de **estruturas** a partir de conjuntos de **sentenças** é usada com frequência em lógica, e às vezes até em filosofia.

com.2 Esboço da Prova

A prova do teorema da completude é um pouco complexa e, em uma primeira leitura, é fácil se perder. Então, vamos esboçar a prova. O primeiro passo é uma mudança de perspectiva, que nos permite enxergar um caminho para uma prova. Quando a completude é pensada como “sempre que $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$ ”, pode ser difícil até mesmo ter uma ideia: pois, para mostrar que $\Gamma \vdash \varphi$, temos que encontrar a **derivação**, e não parece que a hipótese de que $\Gamma \models \varphi$ nos ajude nisso de alguma forma. Para alguns sistemas de prova, é possível construir diretamente a **derivação**, mas adotaremos uma abordagem um pouco diferente. A mudança de perspectiva necessária é esta: a completude também pode ser formulada como: “se Γ é consistente, então é satisfatível”. Talvez possamos usar a informação em Γ juntamente com a hipótese de que ela é consistente para construir a **estrutura** que satisfaça toda **sentença** em Γ . Afinal, sabemos que tipo de **estrutura** estamos procurando: uma que seja como Γ a descreve!

Se Γ contém apenas **sentenças** atômicas, é fácil construir um modelo para ele. Suponha que as **sentenças** atômicas sejam todas da forma $P(a_1, \dots, a_n)$ onde os a_i são **símbolos de constante**. Tudo o que temos a fazer é apresentar a **domínio** $|\mathfrak{M}|$ e uma atribuição para P de modo que $\mathfrak{M} \models P(a_1, \dots, a_n)$. Mas isso não é muito difícil: faça $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$, $c_i^{\mathfrak{M}} = i$ e, para cada $P(a_1, \dots, a_n) \in \Gamma$, coloque a tupla $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ em $P^{\mathfrak{M}}$, onde k_i é o índice do símbolo de constante a_i (isto é, $a_i \equiv c_{k_i}$).

Agora suponha que Γ contenha alguma **fórmula** $\neg\psi$, com ψ atômica. Poderíamos temer que a construção de $\mathfrak{M}$ interfira na possibilidade de tornar $\neg\psi$ verdadeira. Mas é aqui que entra a consistência de Γ : se $\neg\psi \in \Gamma$, então $\psi \notin \Gamma$, caso contrário Γ seria inconsistente. E se $\psi \notin \Gamma$, então, de acordo com nossa

construção de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \not\models \psi$, logo $\mathfrak{M} \models \neg\psi$. Até aqui, tudo bem.

E se Γ contiver fórmulas complexas, não atômicas? Digamos que ele contenha $\varphi \wedge \psi$. Para tornar isso verdadeiro, devemos proceder como se tanto φ quanto ψ estivessem em Γ . E se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, então teremos que tornar pelo menos um deles verdadeiro, isto é, proceder como se um deles estivesse em Γ .

Isso sugere a seguinte ideia: adicionamos **fórmulas** adicionais a Γ de modo a (a) manter o conjunto resultante consistente e (b) garantir que, para toda **sentença** φ atômica possível, ou φ está no conjunto resultante, ou $\neg\varphi$ está, e (c) tais que, sempre que $\varphi \wedge \psi$ está no conjunto, então tanto φ quanto ψ também estão; se $\varphi \vee \psi$ está no conjunto, pelo menos um dentre φ ou ψ também está, etc. Continuamos fazendo isso (potencialmente para sempre). Chame o conjunto de todas as **fórmulas** assim adicionadas de Γ^* . Então a nossa construção acima nos forneceria a **estrutura** $\mathfrak{M}$ para a qual poderíamos provar, por indução, que ela satisfaz todas as sentenças em Γ^* e, portanto, também todas as sentenças em Γ , já que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Acontece que garantir (a) e (b) é suficiente. Um conjunto de sentenças para o qual (b) vale é chamado de *completo*. Assim, nossa tarefa será estender o conjunto consistente Γ a um conjunto consistente e completo Γ^* .

Há um problema neste plano: se $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$, esperaríamos poder escolher algum **símbolo de constante** c e adicionar $\varphi(c)$ neste processo. Mas como sabemos que sempre podemos fazer isso? Talvez tenhamos apenas alguns **símbolos de constante** em nossa linguagem, e, para cada um deles, tenhamos $\neg\varphi(c) \in \Gamma$. Também não podemos adicionar $\varphi(c)$, já que isso tornaria o conjunto inconsistente, e não saberíamos se $\mathfrak{M}$ tem que tornar $\varphi(c)$ ou $\neg\varphi(c)$ verdadeira. Além disso, pode acontecer de Γ conter apenas sentenças em uma linguagem que não tem símbolo de constante algum (por exemplo, a linguagem da teoria dos conjuntos).

A solução para este problema é simplesmente adicionar infinitas constantes no começo, além de sentenças que as conectam com os quantificadores da maneira correta. (Claro, temos que verificar que isso não pode introduzir uma inconsistência.)

Nossa construção original funciona bem se tivermos apenas **símbolos de constante** nas sentenças atômicas. Mas a linguagem também pode conter **símbolos de função**. Nesse caso, pode ser complicado encontrar as funções certas em $\mathbb{N}$ para atribuir a esses **símbolos de função** de modo a fazer tudo funcionar. Então, aqui vai outro truque: em vez de usar i para interpretar c_i , basta tomar o próprio conjunto de **símbolos de constante** como o domínio. Então $\mathfrak{M}$ pode atribuir cada **símbolo de constante** a si mesmo: $c_i^{\mathfrak{M}} = c_i$. Mas por que não ir até o fim: seja $|\mathfrak{M}|$ o conjunto de todos os *termos* da linguagem! Se fizermos isso, há uma atribuição óbvia de funções (que tomam termos como argumentos e têm termos como valores) aos **símbolos de função**: atribuímos ao **símbolo de função** f_i^n a função que, dados n termos $t_1, \dots, t_n$ como entrada, produz o termo $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ como valor.

A última peça do quebra-cabeça é o que fazer com $=$. O **símbolo de predicado** $=$ tem uma interpretação fixa: $\mathfrak{M} \models t = t'$ se e somente se $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t')$. Agora, se ajustarmos as coisas de modo que o **valor** de um termo t

seja o próprio t , então esta **estrutura** não tornará verdadeira *nenhuma* sentença da forma $t = t'$ a menos que t e t' sejam um único e mesmo termo. E, claro, isso é um problema, já que basicamente toda teoria interessante em uma linguagem com **símbolos de função** terá como teoremas sentenças $t = t'$ onde t e t' não são o mesmo termo (por exemplo, em teorias da aritmética: $(0 + 0) = 0$). Para resolver este problema, mudamos o domínio de $\mathfrak{M}$: em vez de usar termos como os objetos em $|\mathfrak{M}|$, usamos conjuntos de termos, e cada conjunto é tal que contém todos aqueles termos que as sentenças em Γ exigem que sejam iguais. Assim, por exemplo, se Γ é uma teoria da aritmética, um desses conjuntos conterà: 0 , $(0 + 0)$, (0×0) , etc. Este será o conjunto que atribuímos a 0 , e acontecerá que este conjunto também é o valor de todos os termos nele, por exemplo, também de $(0 + 0)$. Portanto, a sentença $(0 + 0) = 0$ será verdadeira nesta **estrutura** revisada.

Então, aqui está o que faremos. Primeiro investigamos as propriedades dos conjuntos consistentes **completos**; em particular, provamos que um conjunto consistente **completo** contém $\varphi \wedge \psi$ se e somente se contém tanto φ quanto ψ , contém $\varphi \vee \psi$ se e somente se contém pelo menos um deles, etc. (**Proposição com.2**). Em seguida, definimos e investigamos conjuntos “saturados” de sentenças. Um conjunto saturado é aquele que contém condicionais que ligam cada **sentença** quantificada às suas instâncias (**Definição com.5**). Mostramos que qualquer conjunto consistente Γ sempre pode ser estendido a um conjunto saturado Γ' (**Lema com.6**). Se um conjunto é consistente, saturado e **completo**, ele também tem a propriedade de conter $\exists x \varphi(x)$ se e somente se contém $\varphi(t)$ para algum termo fechado t e $\forall x \varphi(x)$ se e somente se contém $\varphi(t)$ para todo termo fechado t (**Proposição com.7**). Em seguida, tomaremos o conjunto consistente saturado Γ' e mostraremos que ele pode ser estendido a um conjunto saturado, consistente e **completo** Γ^* (**Lema com.8**). Este conjunto Γ^* é o que usaremos para definir nosso modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$. O modelo de termos tem o conjunto de termos fechados como seu domínio, e a interpretação de seus **símbolos de predicado** é dada pelas **sentenças** atômicas em Γ^* (**Definição com.9**). Usaremos as propriedades dos conjuntos consistentes completos e saturados para mostrar que, de fato, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ (**Lema com.12**) e, portanto, em particular, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \Gamma$. Por fim, consideraremos como definir um modelo de termos se Γ contém = também (**Definição com.16**) e mostraremos que ele satisfaz Γ^* (**Lema com.19**).

com.3 Conjuntos Consistentes Completos de Sentenças

Definição com.1 (Conjunto completo). Um conjunto Γ de **sentenças** é **completo** se e somente se, para qualquer **sentença** φ , ou $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.

fol:com:ccs:
sec
fol:com:ccs:
def:complete-set

explanation

Conjuntos **completos** de sentenças não deixam questões sem resposta. Para qualquer **sentença** φ , Γ “diz” se φ é verdadeira ou falsa. A importância dos conjuntos **completos** estende-se para além da prova do teorema da completude. Uma teoria que é completa e axiomatizável, por exemplo, é sempre decidível.

Conjuntos consistentes **completos** são importantes na prova de completude explanation já que podemos garantir que todo conjunto consistente de **sentenças** Γ está contido em um conjunto consistente **completo** Γ^* . Um conjunto consistente **completo** contém, para cada **sentença** φ , ou φ ou sua negação $\neg\varphi$, mas não ambas. Isso é verdade em particular para **sentenças** atômicas, de modo que, a partir de um conjunto consistente **completo** em uma linguagem adequadamente expandida por **símbolos de constante**, podemos construir a **estrutura** onde a interpretação dos **símbolos de predicado** é definida de acordo com quais **sentenças** atômicas estão em Γ^* . Pode-se então mostrar que esta **estrutura** torna verdadeiras todas as **sentenças** em Γ^* (e, portanto, também todas aquelas em Γ). A prova deste último fato requer que $\neg\varphi \in \Gamma^*$ se e somente se $\varphi \notin \Gamma^*$, $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma^*$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ ou $\psi \in \Gamma^*$, etc.

No que se segue, usaremos com frequência, de modo tácito, as propriedades de reflexividade, monotonicidade e transitividade de $\vdash$ (ver ??????????????).

fol:com:ccs: prop:ccs **Proposição com.2.** *Suponha que Γ seja **completo** e consistente. Então:*

- fol:com:ccs: prop:ccs-prov-in 1. *Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.*
- fol:com:ccs: prop:ccs-and 2. *$\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$.*
- fol:com:ccs: prop:ccs-or 3. *$\varphi \vee \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.*
- fol:com:ccs: prop:ccs-if 4. *$\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.*

Prova. Suponhamos, para tudo o que se segue, que Γ seja **completo** e consistente.

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.

Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Suponha, ao contrário, que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é **completo**, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por ??????????????, Γ é inconsistente. Isso contradiz a suposição de que Γ é consistente. Logo, não pode ser o caso que $\varphi \notin \Gamma$, de modo que $\varphi \in \Gamma$.

2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$:

Para a direção direta, suponha $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$. Então por ??????????????, item (1), $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$. Por (1), $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$, como requerido.

Para a direção reversa, sejam $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$. Por ??????????????, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. Por (1), $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$.

3. Primeiro mostramos que, se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, então $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$. Suponha $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ mas $\varphi \notin \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Como Γ é **completo**, $\neg\varphi \in \Gamma$ e $\neg\psi \in \Gamma$. Por ??????????????, item (1), Γ é inconsistente, uma contradição. Logo, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Para a direção reversa, suponha que $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$. Por ??????????????, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. Por (1), $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, como requerido.

4. Para a direção direta, suponha $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ e suponha, ao contrário, que $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Sob essas suposições, $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ e $\varphi \in \Gamma$. Por ?????????????, item (1), $\Gamma \vdash \psi$. Mas então, por (1), $\psi \in \Gamma$, contradizendo a suposição de que $\psi \notin \Gamma$.

Para a direção reversa, considere primeiro o caso em que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por ?????????????, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Novamente por (1), obtemos que $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, como requerido.

Agora considere o caso em que $\psi \in \Gamma$. Por ?????????????, item (2) novamente, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Por (1), $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$. $\square$

Problema com.1. Complete a prova de **Proposição com.2**.

com.4 Expansão de Henkin

explanation

Parte do desafio em provar o teorema da completude é que o modelo que construímos a partir de um conjunto consistente completo Γ deve tornar verdadeiras todas as fórmulas quantificadas em Γ . Para garantir isso, usamos um truque devido a Leon Henkin. Em essência, o truque consiste em expandir a linguagem por infinitos símbolos de constante e adicionar, para cada fórmula com uma variável livre $\varphi(x)$, uma fórmula da forma $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$, onde c é um dos novos símbolos de constante. Quando construímos a estrutura que satisfaz Γ , isso garantirá que cada sentença existencial verdadeira tenha uma testemunha entre as novas constantes.

fol:com:hen:
sec

Proposição com.3. Se Γ é consistente em $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ é obtida de $\mathcal{L}$ adicionando-se a infinito enumerável conjunto de novos símbolos de constante $d_0, d_1, \dots$, então Γ é consistente em $\mathcal{L}'$.

fol:com:hen:
prop:lang-exp

Definição com.4 (Conjunto saturado). Um conjunto Γ de fórmulas de uma linguagem $\mathcal{L}$ é saturado se e somente se, para cada fórmula $\varphi(x) \in \text{Frm}(\mathcal{L})$ com uma variável livre x , existe a símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$ tal que $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \in \Gamma$.

A definição a seguir será usada na prova do próximo teorema.

Definição com.5. Seja $\mathcal{L}'$ como em **Proposição com.3**. Fixe uma enumeração $\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \dots$ de todas as fórmulas $\varphi_i(x_i)$ de $\mathcal{L}'$ nas quais uma variável (x_i) ocorre livre. Definimos as sentenças θ_n por indução sobre n .

fol:com:hen:
defn:henkin-exp

Seja c_0 o primeiro símbolo de constante dentre os d_i que adicionamos a $\mathcal{L}$ que não ocorre em $\varphi_0(x_0)$. Supondo que $\theta_0, \dots, \theta_{n-1}$ já tenham sido definidas, seja c_n o primeiro dentre os novos símbolos de constante d_i que não ocorre nem em $\theta_0, \dots, \theta_{n-1}$ nem em $\varphi_n(x_n)$.

Agora seja θ_n a fórmula $\exists x_n \varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi_n(c_n)$.

Lema com.6. Todo conjunto consistente Γ pode ser estendido a um conjunto saturado consistente Γ' .

fol:com:hen:
lem:henkin

Prova. Dado um conjunto consistente de sentenças Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$, expanda a linguagem adicionando a infinito enumerável conjunto de novos símbolos de constante para formar $\mathcal{L}'$. Por [Proposição com.3](#), Γ ainda é consistente na linguagem mais rica. Além disso, seja θ_i como em [Definição com.5](#). Seja

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &= \Gamma_n \cup \{\theta_n\}\end{aligned}$$

isto é, $\Gamma_{n+1} = \Gamma \cup \{\theta_0, \dots, \theta_n\}$, e seja $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$. Γ' é claramente saturado.

Se Γ' fosse inconsistente, então, para algum n , Γ_n seria inconsistente (Exercício: explique por quê). Portanto, para mostrar que Γ' é consistente, basta mostrar, por indução sobre n , que cada conjunto Γ_n é consistente.

A base da indução é simplesmente a afirmação de que $\Gamma_0 = \Gamma$ é consistente, que é a hipótese do teorema. Para o passo de indução, suponha que Γ_n seja consistente mas $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ seja inconsistente. Lembre que θ_n é $\exists x_n \varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi_n(c_n)$, onde $\varphi_n(x_n)$ é a fórmula de $\mathcal{L}'$ com apenas a variável x_n livre. Pela maneira como escolhemos os c_n (ver [Definição com.5](#)), c_n não ocorre em $\varphi_n(x_n)$ nem em Γ_n .

Se $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ é inconsistente, então $\Gamma_n \vdash \neg \theta_n$ e, portanto, ambos os seguintes valem:

$$\Gamma_n \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n) \quad \Gamma_n \vdash \neg \varphi_n(c_n)$$

Como c_n não ocorre em Γ_n ou em $\varphi_n(x_n)$, [???????????????](#) se aplica. De $\Gamma_n \vdash \neg \varphi_n(c_n)$, obtemos $\Gamma_n \vdash \forall x_n \neg \varphi_n(x_n)$. Assim, temos que ambos $\Gamma_n \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n)$ e $\Gamma_n \vdash \forall x_n \neg \varphi_n(x_n)$, de modo que o próprio Γ_n é inconsistente. (Note que $\forall x_n \neg \varphi_n(x_n) \vdash \neg \exists x_n \varphi_n(x_n)$.) Contradição: supunha-se que Γ_n fosse consistente. Logo, $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ é consistente. $\square$

Mostraremos agora que conjuntos *completos*, consistentes que são saturados [explanation](#) têm a propriedade de que contêm uma [sentença](#) universalmente quantificada se e somente se contêm todas as suas instâncias e contêm uma [sentença](#) existencialmente quantificada se e somente se contêm pelo menos uma instância. Usaremos isso para mostrar que a [estrutura](#) que geraremos a partir de um conjunto completo, consistente, saturado torna todas as suas sentenças quantificadas verdadeiras.

[fol:com:hen:](#)
[prop:saturated-instances](#)

Proposição com.7. *Suponha que Γ seja completo, consistente e saturado.*

1. $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$ se e somente se $\varphi(t) \in \Gamma$ para pelo menos um termo fechado t .
2. $\forall x \varphi(x) \in \Gamma$ se e somente se $\varphi(t) \in \Gamma$ para todo termo fechado t .

Prova. 1. Suponha primeiro que $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$. Como Γ é saturado, $(\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)) \in \Gamma$ para algum [símbolo de constante](#) c . Por [???????????????????](#), item (1), e [Proposição com.2\(1\)](#), $\varphi(c) \in \Gamma$.

Para a outra direção, a saturação não é necessária: Suponha $\varphi(t) \in \Gamma$. Então $\Gamma \vdash \exists x \varphi(x)$ por ??????????????, item (1). Por **Proposição com.2(1)**, $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$.

- Suponha que $\varphi(t) \in \Gamma$ para todo termo fechado t . Por contradição, assumamos $\forall x \varphi(x) \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg \forall x \varphi(x) \in \Gamma$. Por saturação, $(\exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \varphi(c)) \in \Gamma$ para algum **símbolo de constante** c . Por hipótese, como c é um termo fechado, $\varphi(c) \in \Gamma$. Mas isso tornaria Γ inconsistente. (Exercício: dê a **derivação** que mostra que

$$\neg \forall x \varphi(x), \exists x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \varphi(c), \varphi(c)$$

é inconsistente.)

Para a direção reversa, não precisamos de saturação: Suponha $\forall x \varphi(x) \in \Gamma$. Então $\Gamma \vdash \varphi(t)$ por ??????????????, item (2). Obtemos $\varphi(t) \in \Gamma$ por **Proposição com.2**. $\square$

com.5 Lema de Lindenbaum

explanation Provamos agora um lema que mostra que qualquer conjunto consistente de **sentenças** está contido em algum conjunto de sentenças que não é apenas consistente, mas também **completo**. A prova funciona adicionando uma **sentença** de cada vez, garantindo a cada passo que o conjunto permanece consistente. Fazemos isso de modo que, para todo φ , ou φ ou $\neg \varphi$ seja adicionada em algum estágio. A união de todos os estágios dessa construção então contém ou φ ou sua negação $\neg \varphi$ e é, portanto, completa. Ela também é consistente, já que nos asseguramos, a cada estágio, de não introduzir uma inconsistência. **fol:com:lin:sec**

Lema com.8 (Lema de Lindenbaum). *Todo conjunto consistente Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$ pode ser estendido a um conjunto consistente **completo** Γ^* .* **fol:com:lin:lem:lindenbaum**

Prova. Seja Γ consistente. Sejam $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ uma enumeração de todas as **sentenças** de $\mathcal{L}$. Defina $\Gamma_0 = \Gamma$, e

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é consistente;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

Cada Γ_n é consistente: Γ_0 é consistente por definição. Se $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$, isso é porque este último é consistente. Se não é, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\}$. Temos que verificar que $\Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\}$ é consistente. Suponha que não seja. Então **ambos** $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ e $\Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\}$ são inconsistentes. Isso significa que Γ_n seria inconsistente por ??????????????, contrariando a hipótese de indução.

Para todo n e todo $i < n$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$. Isso segue por uma simples indução sobre n . Para $n = 0$, não há $i < 0$, de modo que a afirmação vale automaticamente. Para o passo indutivo, suponha que ela seja verdadeira para n .

Mostramos que, se $i < n + 1$, então $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$. Temos $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ ou $= \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ por construção. Logo $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$. Se $i < n + 1$, então $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ por hipótese indutiva (se $i < n$) ou pelo fato trivial de que $\Gamma_n \subseteq \Gamma_n$ (se $i = n$). Obtemos que $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$ por transitividade de $\subseteq$.

Disso segue que Γ^* é consistente. Eis o porquê: Seja $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ finito. Cada $\psi \in \Gamma'$ também está em Γ_i para algum i . Seja n o maior destes. Como $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ se $i \leq n$, todo $\psi \in \Gamma'$ também está em Γ_n , isto é, $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$, e Γ_n é consistente. Assim, todo subconjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ é consistente. Por ??????????????, Γ^* é consistente.

Toda **sentença** de $\text{Frm}(\mathcal{L})$ aparece na lista usada para definir Γ^* . Se $\varphi_n \notin \Gamma^*$, então isso é porque $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ era inconsistente. Mas então $\neg\varphi_n \in \Gamma^*$, de modo que Γ^* é **completo**. $\square$

com.6 Construção de um Modelo

fol:com:mod: Por ora, não nos preocupamos com $=$, isto é, queremos apenas mostrar que um conjunto consistente Γ de **sentenças** que não contém $=$ é satisfatível. Primeiro **sec** estendemos Γ a um conjunto consistente, **completo** e saturado Γ^* . Nesse caso, a definição de um modelo $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ é simples: Tomamos o conjunto de termos fechados de $\mathcal{L}'$ como o domínio. Atribuímos cada **símbolo de constante** a si mesmo e nos asseguramos de que, mais geralmente, para todo termo fechado t , $\text{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$. Aos **símbolos de predicado** são atribuídas extensões de tal forma que uma **sentença** atômica é verdadeira em $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ se e somente se está em Γ^* . Isso obviamente tornará verdadeiras em $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ todas as **sentenças** atômicas em Γ^* . As demais são verdadeiras desde que o Γ^* com que começamos seja consistente, completo e saturado. **explanation**

fol:com:mod: **Definição com.9 (Modelo de termos).** Seja Γ^* um conjunto consistente, **completo** e saturado de **sentenças** em uma linguagem $\mathcal{L}$. O *modelo de termos* $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ de Γ^* é a **estrutura** definida como segue: **defn:termmodel**

1. O **domínio** $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$ é o conjunto de todos os termos fechados de $\mathcal{L}$.
2. A interpretação de a **símbolo de constante** c é o próprio c : $c^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)} = c$.
3. Ao **símbolo de função** f é atribuída a função que, dados como argumentos os termos fechados $t_1, \dots, t_n$, tem como valor o termo fechado $f(t_1, \dots, t_n)$:

$$f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

4. Se R é um **símbolo de predicado** de n lugares, então

$$\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)} \text{ se e somente se } R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^*.$$

Verificaremos agora que de fato temos $\text{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$.

fol:com:mod: **Lema com.10.** *Seja $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ o modelo de termos de Definição com.9; então* **lem:val-in-termmodel** $\text{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t) = t$.

Prova. A prova é por indução sobre t , onde o caso base, quando t é a **símbolo de constante**, segue diretamente da definição do modelo de termos. Para o passo de indução, assumamos que $t_1, \dots, t_n$ são termos fechados tais que $\text{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_i) = t_i$ e que f é a **símbolo de função** n -ária. Então

$$\begin{aligned}\text{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(f(t_1, \dots, t_n)) &= f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(\text{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1), \dots, \text{Val}^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_n)) \\ &= f^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}(t_1, \dots, t_n) \\ &= f(t_1, \dots, t_n),\end{aligned}$$

e, assim, por indução, isto vale para todo termo fechado t . $\square$

explanation A estrutura $\mathfrak{M}$ pode tornar verdadeira uma **sentença** $\exists x \varphi(x)$ existencialmente quantificada sem que haja uma instância $\varphi(t)$ que ela torne verdadeira. A **estrutura** $\mathfrak{M}$ pode tornar verdadeiras todas as instâncias $\varphi(t)$ de uma **sentença** $\forall x \varphi(x)$ universalmente quantificada sem tornar $\forall x \varphi(x)$ verdadeira. Isso ocorre porque, em geral, nem todo **membro** de $|\mathfrak{M}|$ é o valor de um termo fechado ($\mathfrak{M}$ pode não ser coberta). Esta é a razão pela qual a relação de satisfação é definida por meio de atribuições de variáveis. Entretanto, para o nosso modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ isso não seria necessário — porque ela é coberta. Este é o conteúdo do próximo resultado.

Proposição com.11. *Seja $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ o modelo de termos de **Definição com.9**.*

*fol:com:mod:
prop:quant-termmodel*

1. $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \exists x \varphi(x)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi(t)$ para pelo menos um termo fechado t .
2. $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \forall x \varphi(x)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi(t)$ para todo termo fechado t .

Prova. 1. Por ??, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \exists x \varphi(x)$ se e somente se, para pelo menos uma atribuição de variáveis s , $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(x)$. Como $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$ consiste nos termos fechados de $\mathcal{L}$, este é o caso se e somente se há pelo menos um termo fechado t tal que $s(x) = t$ e $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(x)$. Por ??, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(x)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(t)$, onde $s(x) = t$. Por ??, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(t)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi(t)$, já que $\varphi(t)$ é uma sentença.

2. Por ??, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \forall x \varphi(x)$ se e somente se, para toda atribuição de variáveis s , $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(x)$. Lembre que $|\mathfrak{M}(\Gamma^*)|$ consiste nos termos fechados de $\mathcal{L}$, de modo que, para todo termo fechado t , $s(x) = t$ é uma tal atribuição de variáveis, e, para qualquer atribuição de variáveis, $s(x)$ é algum termo fechado t . Por ??, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(x)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(t)$, onde $s(x) = t$. Por ??, $\mathfrak{M}(\Gamma^*), s \models \varphi(t)$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi(t)$, já que $\varphi(t)$ é uma sentença. $\square$

Lema com.12 (Lema da Verdade). *Suponha que φ não contenha $=$. Então $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$.*

*fol:com:mod:
lem:truth*

Prova. Provamos ambas as direções simultaneamente e por indução sobre φ .

1. $\varphi \equiv \perp$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \not\models \perp$ por definição de satisfação. Por outro lado, $\perp \notin \Gamma^*$ já que Γ^* é consistente.
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \top$ por definição de satisfação. Por outro lado, $\top \in \Gamma^*$ já que Γ^* é consistente e **completo**, e $\Gamma^* \vdash \top$.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_n)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models R(t_1, \dots, t_n)$ se e somente se $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}(\Gamma^*)}$ (pela definição de satisfação) se e somente se $R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^*$ (pela construção de $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$).
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \not\models \psi$ (por definição de satisfação). Por hipótese de indução, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \not\models \psi$ se e somente se $\psi \notin \Gamma^*$. Como Γ^* é consistente e **completo**, $\psi \notin \Gamma^*$ se e somente se $\neg\psi \in \Gamma^*$.
5. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se temos ambos $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \psi$ e $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \in \Gamma^*$ e $\chi \in \Gamma^*$ (pela hipótese de indução). Por **Proposição com.2(2)**, este é o caso se e somente se $(\psi \wedge \chi) \in \Gamma^*$.
6. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \psi$ ou $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \in \Gamma^*$ ou $\chi \in \Gamma^*$ (por hipótese de indução). Este é o caso se e somente se $(\psi \vee \chi) \in \Gamma^*$ (por **Proposição com.2(3)**).
7. $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \not\models \psi$ ou $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \notin \Gamma^*$ ou $\chi \in \Gamma^*$ (por hipótese de indução). Este é o caso se e somente se $(\psi \rightarrow \chi) \in \Gamma^*$ (por **Proposição com.2(4)**).
8. $\varphi \equiv \forall x \psi(x)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \psi(t)$ para todos os termos t (**Proposição com.11**). Por hipótese de indução, este é o caso se e somente se $\psi(t) \in \Gamma^*$ para todos os termos t ; por **Proposição com.7**, isto, por sua vez, é o caso se e somente se $\forall x \psi(x) \in \Gamma^*$.
9. $\varphi \equiv \exists x \psi(x)$: $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \psi(t)$ para pelo menos um termo t (**Proposição com.11**). Por hipótese de indução, este é o caso se e somente se $\psi(t) \in \Gamma^*$ para pelo menos um termo t . Por **Proposição com.7**, isto, por sua vez, é o caso se e somente se $\exists x \psi(x) \in \Gamma^*$.

□

com.7 Identidade

fol:com:ide: sec A construção do modelo de termos dada na seção anterior é suficiente para explanation estabelecer a completude da lógica de primeira ordem para conjuntos Γ que não contêm $=$. O modelo de termos satisfaz todo $\varphi \in \Gamma^*$ que não contêm $=$ (e, portanto, todo $\varphi \in \Gamma$). Ele não funciona, no entanto, se $=$ está presente. A

razão é que Γ^* pode então conter a **sentença** $t = t'$, mas no modelo de termos o valor de qualquer termo é esse próprio termo. Logo, se t e t' são termos diferentes, seus valores no modelo de termos — isto é, t e t' , respectivamente — são diferentes, e assim $t = t'$ é falsa. Podemos corrigir isso, no entanto, usando uma construção conhecida como “fatoração”.

Definição com.13. Seja Γ^* um conjunto consistente e **completo** de sentenças em $\mathcal{L}$. Definimos a relação $\approx$ sobre o conjunto de termos fechados de $\mathcal{L}$ por

$$t \approx t' \quad \text{se e somente se} \quad t = t' \in \Gamma^*$$

Proposição com.14. A relação $\approx$ tem as seguintes propriedades:

*fol:com:ide:
prop:approx-equiv*

1. $\approx$ é reflexiva.
2. $\approx$ é simétrica.
3. $\approx$ é transitiva.
4. Se $t \approx t'$, f é a **símbolo de função**, e $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ são termos fechados, então

$$f(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \approx f(t_1, \dots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \dots, t_n).$$

5. Se $t \approx t'$, R é a **símbolo de predicado**, e $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ são termos fechados, então

$$R(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \in \Gamma^* \quad \text{se e somente se} \quad R(t_1, \dots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \dots, t_n) \in \Gamma^*.$$

Prova. Como Γ^* é consistente e **completo**, $t = t' \in \Gamma^*$ se e somente se $\Gamma^* \vdash t = t'$. Assim, basta mostrar o seguinte:

1. $\Gamma^* \vdash t = t$ para todos os termos fechados t .
2. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ então $\Gamma^* \vdash t' = t$.
3. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ e $\Gamma^* \vdash t' = t''$, então $\Gamma^* \vdash t = t''$.
4. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$, então

$$\Gamma^* \vdash f(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \dots, t_n)$$

para todo **símbolo de função** f de n lugares e termos fechados $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$.

5. Se $\Gamma^* \vdash t = t'$ e $\Gamma^* \vdash R(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n)$, então $\Gamma^* \vdash R(t_1, \dots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \dots, t_n)$ para todo **símbolo de predicado** R de n lugares e termos fechados $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$. $\square$

Problema com.2. Complete a prova de [Proposição com.14](#).

Definição com.15. Suponha que Γ^* seja um conjunto consistente e **completo** em uma linguagem $\mathcal{L}$, t seja um termo fechado e $\approx$ como na definição anterior. Então:

$$[t]_{\approx} = \{t' : t' \in \text{Trm}(\mathcal{L}), t \approx t'\}$$

e $\text{Trm}(\mathcal{L})/\approx = \{[t]_{\approx} : t \in \text{Trm}(\mathcal{L})\}$.

fol:com:ide:
defn:term-model-factor

Definição com.16. Seja $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Gamma^*)$ o modelo de termos para Γ^* de [Definição com.9](#). Então $\mathfrak{M}/\approx$ é a seguinte **estrutura**:

1. $|\mathfrak{M}/\approx| = \text{Trm}(\mathcal{L})/\approx$.
2. $c^{\mathfrak{M}/\approx} = [c]_{\approx}$
3. $f^{\mathfrak{M}/\approx}([t_1]_{\approx}, \dots, [t_n]_{\approx}) = [f(t_1, \dots, t_n)]_{\approx}$
4. $\langle [t_1]_{\approx}, \dots, [t_n]_{\approx} \rangle \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ se e somente se $\mathfrak{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$, isto é, se e somente se $R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^*$.

Note que definimos $f^{\mathfrak{M}/\approx}$ e $R^{\mathfrak{M}/\approx}$ para elementos de $\text{Trm}(\mathcal{L})/\approx$ referindo-nos a eles como $[t]_{\approx}$, isto é, por meio de *representantes* $t \in [t]_{\approx}$. Temos que nos assegurar de que essas definições não dependam da escolha desses representantes, isto é, de que, para algumas outras escolhas t' que determinam as mesmas classes de equivalência ($[t]_{\approx} = [t']_{\approx}$), as definições produzam o mesmo resultado. Por exemplo, se R é um **símbolo de predicado** de um lugar, a última cláusula da definição diz que $[t]_{\approx} \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ se e somente se $\mathfrak{M} \models R(t)$. Se, para algum outro termo t' com $t \approx t'$, $\mathfrak{M} \not\models R(t)$, então a definição exigiria $[t']_{\approx} \notin R^{\mathfrak{M}/\approx}$. Se $t \approx t'$, então $[t]_{\approx} = [t']_{\approx}$, mas não podemos ter ao mesmo tempo $[t]_{\approx} \in R^{\mathfrak{M}/\approx}$ e $[t]_{\approx} \notin R^{\mathfrak{M}/\approx}$. Entretanto, [Proposição com.14](#) garante que isso não pode acontecer.

explanation

Proposição com.17. $\mathfrak{M}/\approx$ está bem definida, isto é, se $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$ são termos fechados, e $t_i \approx t'_i$, então

1. $[f(t_1, \dots, t_n)]_{\approx} = [f(t'_1, \dots, t'_n)]_{\approx}$, isto é,

$$f(t_1, \dots, t_n) \approx f(t'_1, \dots, t'_n)$$

e

2. $\mathfrak{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$ se e somente se $\mathfrak{M} \models R(t'_1, \dots, t'_n)$, isto é,

$$R(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^* \text{ se e somente se } R(t'_1, \dots, t'_n) \in \Gamma^*.$$

Prova. Segue de [Proposição com.14](#) por indução sobre n . □

Como no caso do modelo de termos, antes de provar o lema da verdade precisamos do seguinte lema.

Lema com.18. *Seja $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Gamma^*)$; então $\text{Val}^{\mathfrak{M}/\approx}(t) = [t]_{\approx}$.*

*fol:com:ide:
lem:val-in-termmodel-factored*

Prova. A prova é similar à de **Lema com.10**. □

Problema com.3. Complete a prova de **Lema com.18**.

Lema com.19. $\mathfrak{M}/\approx \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ para todas as sentenças φ .

*fol:com:ide:
lem:truth*

Prova. Por indução sobre φ , exatamente como na prova de **Lema com.12**. O único caso que precisa de atenção adicional é quando $\varphi \equiv t = t'$.

$\mathfrak{M}/\approx \models t = t'$ se e somente se $[t]_{\approx} = [t']_{\approx}$ (por definição de $\mathfrak{M}/\approx$)

se e somente se $t \approx t'$ (por definição de $[t]_{\approx}$)

se e somente se $t = t' \in \Gamma^*$ (por definição de $\approx$). □

digression

Note que, embora $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ seja sempre **enumerável** e infinita, $\mathfrak{M}/\approx$ pode ser finita, já que pode ocorrer que haja apenas finitas classes $[t]_{\approx}$. Isso é de se esperar, já que Γ pode conter **sentenças** que exigem que qualquer **estrutura** na qual elas sejam verdadeiras seja finita. Por exemplo, $\forall x \forall y x = y$ é **a sentença** consistente, mas é satisfeita apenas em **estruturas** com **a domínio** que contém exatamente um **membro**.

com.8 O Teorema da Completude

explanation

Vamos combinar nossos resultados: chegamos ao teorema da completude.

*fol:com:cth:
sec*

Teorema com.20 (Teorema da Completude). *Seja Γ um conjunto de **sentenças**. Se Γ é consistente, então é satisfatível.*

*fol:com:cth:
thm:completeness*

Prova. Suponha que Γ seja consistente. Por **Lema com.6**, existe um conjunto saturado consistente $\Gamma' \supseteq \Gamma$. Por **Lema com.8**, existe um $\Gamma^* \supseteq \Gamma'$ que é consistente e **completo**. Como $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$, para cada **fórmula** $\varphi(x)$, Γ^* contém **a sentença** da forma $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$ e, assim, Γ^* é saturado. Se Γ não contém $=$, então, por **Lema com.12**, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$. Disso segue, em particular, que, para todo $\varphi \in \Gamma$, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$, de modo que Γ é satisfatível. Se Γ de fato contém $=$, então, por **Lema com.19**, para todas as **sentenças** φ , $\mathfrak{M}/\approx \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$. Em particular, $\mathfrak{M}/\approx \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$, de modo que Γ é satisfatível. □

Corolário com.21 (Teorema da Completude, Segunda Versão). *Para todo Γ e **sentenças** φ : se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$.*

*fol:com:cth:
cor:completeness*

Prova. Note que os Γ em **Corolário com.21** e **Teorema com.20** são universalmente quantificados. Para nos certificarmos de que não nos confundimos, reformulemos **Teorema com.20** usando uma variável diferente: para qualquer

conjunto de **sentenças** Δ , se Δ é consistente, então é satisfatível. Por contraposição, se Δ não é satisfatível, então Δ é inconsistente. Usaremos isso para provar o corolário.

Suponha que $\Gamma \models \varphi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível por ???. Tomando $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ como nosso Δ , a versão anterior de **Teorema com.20** nos dá que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente. Por ??????????????, $\Gamma \vdash \varphi$. $\square$

Problema com.4. Use **Corolário com.21** para provar **Teorema com.20**, mostrando assim que as duas formulações do teorema da completude são equivalentes.

Problema com.5. Para que um sistema de **derivação** seja completo, suas regras devem ser fortes o suficiente para provar que todo conjunto insatisfatível é inconsistente. Quais das regras de **derivação** foram necessárias para provar a completude? Alguma dessas regras não é usada em nenhum lugar da prova? Para responder a essas perguntas, faça uma lista ou diagrama que mostre quais das regras de **derivação** foram usadas em quais resultados que levam à prova de **Teorema com.20**. Certifique-se de anotar quaisquer usos tácitos de regras nessas provas.

com.9 O Teorema da Compacidade

fol:com:com:
sec

Uma consequência importante do teorema da completude é o teorema da compacidade. O teorema da compacidade afirma que, se cada subconjunto *finito* de um conjunto de **sentenças** é satisfatível, o conjunto inteiro é satisfatível — mesmo que o próprio conjunto seja infinito. Isso está longe de ser óbvio. Não há nada que pareça descartar, ao menos à primeira vista, a possibilidade de existirem conjuntos infinitos de **sentenças** que sejam contraditórios, mas em que a contradição só surge, por assim dizer, do número infinito. O teorema da compacidade diz que tal cenário pode ser descartado: não existem conjuntos infinitos insatisfatíveis de **sentenças** tais que cada subconjunto finito deles seja satisfatível. Como o teorema da completude, ele tem uma versão relacionada à consequência lógica: se um conjunto infinito de **sentenças** implica algo, então já um subconjunto finito o implica.

Definição com.22. Um conjunto Γ de **fórmulas** é *finitamente satisfatível* se e somente se todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito é satisfatível.

fol:com:com:
thm:compactness

Teorema com.23 (Teorema da Compacidade). *O seguinte vale para quaisquer sentenças Γ e φ :*

1. $\Gamma \models \varphi$ se e somente se existe um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \models \varphi$.
2. Γ é satisfatível se e somente se é finitamente satisfatível.

Prova. Provamos (2). Se Γ é satisfatível, então existe a **estrutura** $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$. É claro que essa $\mathfrak{M}$ também satisfaz todo subconjunto finito de Γ , de modo que Γ é finitamente satisfatível.

Agora suponha que Γ seja finitamente satisfatível. Então todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ é satisfatível. Pela correção (????????????), todo subconjunto finito é consistente. Então o próprio Γ deve ser consistente por ??????????. Pela completude (Teorema com.20), como Γ é consistente, ele é satisfatível. $\square$

Problema com.6. Prove (1) de Teorema com.23.

Exemplo com.24. Em todo modelo $\mathfrak{M}$ de uma teoria Γ , cada termo t obviamente designa um membro de $|\mathfrak{M}|$. Podemos garantir que também seja verdade que todo membro de $|\mathfrak{M}|$ seja designado por algum termo? Em outras palavras, existem teorias Γ cujos modelos são todos cobertos? O teorema da compacidade mostra que esse não é o caso se Γ tem modelos infinitos. Eis como ver isso: Seja $\mathfrak{M}$ um modelo infinito de Γ , e seja c a **símbolo de constante** que não está na linguagem de Γ . Seja Δ o conjunto de todas as sentenças $c \neq t$ para t um termo na linguagem $\mathcal{L}$ de Γ , isto é,

$$\Delta = \{c \neq t : t \in \text{Trm}(\mathcal{L})\}.$$

Um subconjunto finito de $\Gamma \cup \Delta$ pode ser escrito como $\Gamma' \cup \Delta'$, com $\Gamma' \subseteq \Gamma$ e $\Delta' \subseteq \Delta$. Como Δ' é finito, ele pode conter apenas finitos termos. Seja $a \in |\mathfrak{M}|$ um membro de $|\mathfrak{M}|$ que não é designado por nenhum deles, e seja $\mathfrak{M}'$ a **estrutura** que é exatamente como $\mathfrak{M}$, mas com $c^{\mathfrak{M}'} = a$ também. Como $a \neq \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ para todo t que ocorre em Δ' , $\mathfrak{M}' \models \Delta'$. Como $\mathfrak{M} \models \Gamma$, $\Gamma' \subseteq \Gamma$, e c não ocorre em Γ' , também $\mathfrak{M}' \models \Gamma'$. Juntando, $\mathfrak{M}' \models \Gamma' \cup \Delta'$ para todo subconjunto finito $\Gamma' \cup \Delta'$ de $\Gamma \cup \Delta$. Assim, todo subconjunto finito de $\Gamma \cup \Delta$ é satisfatível. Por compacidade, o próprio $\Gamma \cup \Delta$ é satisfatível. Logo, existem modelos $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \Delta$. Todo tal $\mathfrak{M}$ é um modelo de Γ , mas não é coberto, já que $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(c) \neq \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ para todos os termos t de $\mathcal{L}$.

Exemplo com.25. Considere a **linguagem** $\mathcal{L}$ contendo o **símbolo de predicado** $<$, **símbolos de constante** 0 , 1 , e **símbolos de função** $+$, $\times$, e $-$. Seja Γ o conjunto de todas as **sentenças** nesta **linguagem** verdadeiras na **estrutura** $\mathbb{Q}$ com domínio $\mathbb{Q}$ e as interpretações óbvias. Γ é o conjunto de todas as **sentenças** de $\mathcal{L}$ verdadeiras a respeito dos números racionais. É claro que, em $\mathbb{Q}$ (e mesmo em $\mathbb{R}$), não há números r que sejam maiores que 0 mas menores que $1/k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Tal número, se existisse, seria um *infinitesimal*: não nulo, mas infinitamente pequeno. O teorema da compacidade pode ser usado para mostrar que há modelos de Γ nos quais infinitesimais existem. Não temos a **símbolo de função** para a divisão em nossa linguagem (a divisão por zero é indefinida, e **símbolos de função** têm de ser interpretadas por funções totais). Contudo, ainda podemos expressar que $r < 1/k$, já que isso ocorre se e somente se $r \cdot k < 1$. Agora seja c a **símbolo de constante** nova e seja Δ

$$\{0 < c\} \cup \{c \times \bar{k} < 1 : k \in \mathbb{Z}^+\}$$

(onde $\bar{k} = (1 + (1 + \dots + (1 + 1) \dots))$ com k 1's). Para qualquer subconjunto finito Δ_0 de Δ existe um K tal que todas as **sentenças** $c \times \bar{k} < 1$ em Δ_0 têm

$k < K$. Se expandirmos $\mathfrak{Q}$ para $\mathfrak{Q}'$ com $c^{\mathfrak{Q}'} = 1/K$ temos que $\mathfrak{Q}' \models \Gamma_0 \cup \Delta_0$ para qualquer $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, e assim $\Gamma \cup \Delta$ é finitamente satisfatível (Exercício: prove isso em detalhe). Por compacidade, $\Gamma \cup \Delta$ é satisfatível. Qualquer modelo $\mathfrak{S}$ de $\Gamma \cup \Delta$ contém um infinitesimal, a saber $c^{\mathfrak{S}}$.

Problema com.7. No modelo padrão da aritmética $\mathfrak{N}$, não há **membro** $k \in |\mathfrak{N}|$ que satisfaça toda fórmula $\bar{n} < x$ (onde $\bar{n}$ é $0'\dots'$ com n $'$'s). Use o teorema da compacidade para mostrar que o conjunto de **sentenças** na linguagem da aritmética que são verdadeiras no modelo padrão da aritmética $\mathfrak{N}$ também são verdadeiras em **a estrutura** $\mathfrak{N}'$ que contém **um membro** que *de fato* satisfaz toda fórmula $\bar{n} < x$.

Exemplo com.26. Sabemos que a lógica de primeira ordem com **predicado de identidade** pode expressar que o tamanho do **domínio** deve ter algum tamanho mínimo: A sentença $\varphi_{\geq n}$ (que diz “existem pelo menos n objetos distintos”) é verdadeira apenas em estruturas onde $|\mathfrak{M}|$ tem pelo menos n objetos. Assim, se tomarmos

$$\Delta = \{\varphi_{\geq n} : n \geq 1\}$$

então qualquer modelo de Δ deve ser infinito. Desse modo, podemos garantir que uma teoria só tenha modelos infinitos adicionando Δ a ela: os modelos de $\Gamma \cup \Delta$ são todos os modelos infinitos de Γ , e apenas eles.

Portanto, a lógica de primeira ordem pode expressar a infinitude. O teorema da compacidade mostra que ela não pode expressar a finitude, no entanto. Pois suponha que algum conjunto de sentenças Λ fosse satisfeito em todas as **estruturas** finitas, e apenas nelas. Então $\Delta \cup \Lambda$ é finitamente satisfatível. Por quê? Suponha que $\Delta' \cup \Lambda' \subseteq \Delta \cup \Lambda$ seja finito, com $\Delta' \subseteq \Delta$ e $\Lambda' \subseteq \Lambda$. Seja n o maior número tal que $\varphi_{\geq n} \in \Delta'$. Λ' , sendo satisfeito em todas as estruturas finitas, tem um modelo $\mathfrak{M}$ com um número finito de **membros**, mas $\geq n$ deles. Mas então $\mathfrak{M} \models \Delta' \cup \Lambda'$. Por compacidade, $\Delta \cup \Lambda$ tem um modelo infinito, contradizendo a suposição de que Λ é satisfeito apenas em **estruturas** finitas.

com.10 Uma Prova Direta do Teorema da Compacidade

fol:com:cpd:
sec

Podemos provar o Teorema da Compacidade diretamente, sem apelar ao Teorema da Completude, usando as mesmas ideias da prova do teorema da completude. Na prova do Teorema da Completude, começamos com um conjunto Γ consistente de **sentenças**, expandimos-o para um conjunto Γ^* de **sentenças** consistente, saturado, e **completo**, e então mostramos que no modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ construído a partir de Γ^* , todas as **sentenças** de Γ são verdadeiras, de modo que Γ é satisfatível.

Podemos usar o mesmo método para mostrar que um conjunto finitamente satisfatível de sentenças é satisfatível. Só temos que provar as versões correspondentes dos resultados que levam ao lema da verdade, substituindo “consistente” por “finitamente satisfatível”.

Proposição com.27. *Suponha que Γ é **completo** e finitamente satisfatível. Então:* fol:com:cpd:
prop:fsat-ccs

1. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, tanto $\varphi \in \Gamma$ quanto $\psi \in \Gamma$.
2. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.
3. $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Problema com.8. Prove **Proposição com.27**. Evite o uso de $\vdash$.

Lema com.28. *Todo conjunto finitamente satisfatível Γ pode ser estendido a um conjunto saturado finitamente satisfatível Γ' .* fol:com:cpd:
lem:fsat-henkin

Problema com.9. Prove **Lema com.28**. (Dica: o passo crucial é mostrar que se Γ_n é finitamente satisfatível, então $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ também o é, sem qualquer apelo a **derivações** ou consistência.)

Proposição com.29. *Suponha que Γ é completo, finitamente satisfatível e saturado.* fol:com:cpd:
prop:fsat-instances

1. $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi(t) \in \Gamma$ para pelo menos um termo fechado t .
2. $\forall x \varphi(x) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi(t) \in \Gamma$ para todos os termos fechados t .

Problema com.10. Prove **Proposição com.29**.

Lema com.30. *Todo conjunto finitamente satisfatível Γ pode ser estendido a um conjunto **completo** e finitamente satisfatível Γ^* .* fol:com:cpd:
lem:fsat-lindenbaum

Problema com.11. Prove **Lema com.30**. (Dica: o passo crucial é mostrar que se Γ_n é finitamente satisfatível, então ou $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ ou $\Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\}$ é finitamente satisfatível.)

Teorema com.31 (Compacidade). *Γ é satisfatível se, e somente se, é finitamente satisfatível.* fol:com:cpd:
thm:compactness-direct

Prova. Se Γ é satisfatível, então há a **estrutura** $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$. É claro que esta $\mathfrak{M}$ também satisfaz todo subconjunto finito de Γ , de modo que Γ é finitamente satisfatível.

Agora suponha que Γ é finitamente satisfatível. Por **Lema com.28**, há um conjunto finitamente satisfatível e saturado $\Gamma' \supseteq \Gamma$. Por **Lema com.30**, Γ' pode ser estendido a um conjunto **completo** e finitamente satisfatível Γ^* , e Γ^* ainda é saturado. Construa o modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ como em **Definição com.9**. Note que **Proposição com.11** não dependeu do fato de que Γ^* é consistente (ou **completo** ou saturado, aliás), mas apenas do fato de que $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ é coberta. A prova do Lema da Verdade (**Lema com.12**) funciona se substituirmos referências a **Proposição com.2** e **Proposição com.7** por referências a **Proposição com.27** e **Proposição com.29** □

Problema com.12. Escreva a prova completa do Lema da Verdade (**Lema com.12**) na versão necessária para a prova de **Teorema com.31**.

com.11 O Teorema de Löwenheim–Skolem

fol:com:dls:
sec O Teorema de Löwenheim–Skolem diz que se uma teoria tem um modelo infinito, então ela também tem um modelo que é no máximo **infinito enumerável**. Uma consequência imediata desse fato é que a lógica de primeira ordem não pode expressar que o tamanho de **a estrutura** é **não enumerável**: qualquer **sentença** ou conjunto de **sentenças** satisfeito em todas as **estruturas não enumeráveis** também é satisfeito em alguma estrutura **enumerável**.

fol:com:dls:
thm:downward-ls **Teorema com.32.** *Se Γ é consistente, então ela tem um modelo **enumerável**, isto é, é satisfatível em **a estrutura** cujo domínio é finito ou **infinito enumerável**.*

Prova. Se Γ é consistente, a **estrutura** $\mathfrak{M}$ fornecida pela prova do teorema da completude tem um domínio $|\mathfrak{M}|$ que não é maior do que o conjunto dos termos da linguagem $\mathcal{L}$. Assim $\mathfrak{M}$ é no máximo **infinito enumerável**. $\square$

fol:com:dls:
noidentity-ls **Teorema com.33.** *Se Γ é um conjunto consistente de **sentenças** na linguagem da lógica de primeira ordem sem identidade, então ela tem um modelo **infinito enumerável**, isto é, é satisfatível em **a estrutura** cujo domínio é infinito e **enumerável**.*

Prova. Se Γ é consistente e não contém sentenças em que a identidade aparece, então a **estrutura** $\mathfrak{M}$ fornecida pela prova do teorema da completude tem um domínio $|\mathfrak{M}|$ idêntico ao conjunto dos termos da linguagem $\mathcal{L}'$. Assim $\mathfrak{M}$ é **infinito enumerável**, pois $\text{Trm}(\mathcal{L}')$ o é. $\square$

Exemplo com.34 (Paradoxo de Skolem). A teoria dos conjuntos de Zermelo–Fraenkel **ZFC** é um arcabouço muito poderoso no qual praticamente todas as afirmações matemáticas podem ser expressas, incluindo fatos sobre os tamanhos de conjuntos. Assim, por exemplo, **ZFC** pode provar que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é **não enumerável**, pode provar o Teorema de Cantor de que o conjunto potência de qualquer conjunto é maior do que o próprio conjunto, etc. Se **ZFC** é consistente, seus modelos são todos infinitos e, além disso, todos contêm **membros** sobre os quais a teoria diz que são **não enumeráveis**, como o elemento que torna verdadeiro o teorema de **ZFC** de que o conjunto potência dos números naturais existe. Pelo Teorema de Löwenheim–Skolem, **ZFC** também tem modelos **enumeráveis**—modelos que contêm conjuntos “**não enumeráveis**”, mas que eles mesmos são **enumeráveis**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas