

com.1 O Teorema da Completude

fol:com:cth: Vamos combinar nossos resultados: chegamos ao teorema da completude. explanation
sec

fol:com:cth: **Teorema com.1 (Teorema da Completude).** *Seja Γ um conjunto de sen-*
thm:completeness *tenças. Se Γ é consistente, então é satisfatível.*

Prova. Suponha que Γ seja consistente. Por ??, existe um conjunto saturado consistente $\Gamma' \supseteq \Gamma$. Por ??, existe um $\Gamma^* \supseteq \Gamma'$ que é consistente e completo. Como $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$, para cada fórmula $\varphi(x)$, Γ^* contém a sentença da forma $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)$ e, assim, Γ^* é saturado. Se Γ não contém $=$, então, por ??, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$. Disso segue, em particular, que, para todo $\varphi \in \Gamma$, $\mathfrak{M}(\Gamma^*) \models \varphi$, de modo que Γ é satisfatível. Se Γ de fato contém $=$, então, por ??, para todas as sentenças φ , $\mathfrak{M}/\approx \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$. Em particular, $\mathfrak{M}/\approx \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$, de modo que Γ é satisfatível. $\square$

fol:com:cth: **Corolário com.2 (Teorema da Completude, Segunda Versão).** *Para todo*
cor:completeness *Γ e sentenças φ : se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$.*

Prova. Note que os Γ em Corolário com.2 e Teorema com.1 são universalmente quantificados. Para nos certificarmos de que não nos confundimos, reformulemos Teorema com.1 usando uma variável diferente: para qualquer conjunto de sentenças Δ , se Δ é consistente, então é satisfatível. Por contraposição, se Δ não é satisfatível, então Δ é inconsistente. Usaremos isso para provar o corolário.

Suponha que $\Gamma \models \varphi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível por ??. Tomando $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ como nosso Δ , a versão anterior de Teorema com.1 nos dá que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente. Por ??????????????, $\Gamma \vdash \varphi$. $\square$

Problema com.1. Use Corolário com.2 para provar Teorema com.1, mostrando assim que as duas formulações do teorema da completude são equivalentes.

Problema com.2. Para que um sistema de derivação seja completo, suas regras devem ser fortes o suficiente para provar que todo conjunto insatisfatível é inconsistente. Quais das regras de derivação foram necessárias para provar a completude? Alguma dessas regras não é usada em nenhum lugar da prova? Para responder a essas perguntas, faça uma lista ou diagrama que mostre quais das regras de derivação foram usadas em quais resultados que levam à prova de Teorema com.1. Certifique-se de anotar quaisquer usos tácitos de regras nessas provas.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas