

com.1 Conjuntos Consistentes Completos de Sentenças

fol:com:ccs:
 sec
 fol:com:ccs:
 def:complete-set

Definição com.1 (Conjunto completo). Um conjunto Γ de **sentenças** é **completo** se e somente se, para qualquer **sentença** φ , ou $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.

Conjuntos **completos** de sentenças não deixam questões sem resposta. Para qualquer **sentença** φ , Γ “diz” se φ é verdadeira ou falsa. A importância dos conjuntos **completos** estende-se para além da prova do teorema da completude. Uma teoria que é completa e axiomatizável, por exemplo, é sempre decidível. explanation

Conjuntos consistentes **completos** são importantes na prova de completude já que podemos garantir que todo conjunto consistente de **sentenças** Γ está contido em um conjunto consistente **completo** Γ^* . Um conjunto consistente **completo** contém, para cada **sentença** φ , ou φ ou sua negação $\neg\varphi$, mas não ambas. Isso é verdade em particular para **sentenças** atômicas, de modo que, a partir de um conjunto consistente **completo** em uma linguagem adequadamente expandida por **símbolos de constante**, podemos construir **a estrutura** onde a interpretação dos **símbolos de predicado** é definida de acordo com quais **sentenças** atômicas estão em Γ^* . Pode-se então mostrar que esta **estrutura** torna verdadeiras todas as **sentenças** em Γ^* (e, portanto, também todas aquelas em Γ). A prova deste último fato requer que $\neg\varphi \in \Gamma^*$ se e somente se $\varphi \notin \Gamma^*$, $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma^*$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ ou $\psi \in \Gamma^*$, etc. explanation

No que se segue, usaremos com frequência, de modo tácito, as propriedades de reflexividade, monotonicidade e transitividade de $\vdash$ (ver ??????????????).

fol:com:ccs:
 prop:ccs

Proposição com.2. Suponha que Γ seja **completo** e consistente. Então:

fol:com:ccs:
 prop:ccs-prov-in

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.

fol:com:ccs:
 prop:ccs-and

2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$.

fol:com:ccs:
 prop:ccs-or

3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

fol:com:ccs:
 prop:ccs-if

4. $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Prova. Suponhamos, para tudo o que se segue, que Γ seja **completo** e consistente.

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.

Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Suponha, ao contrário, que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é **completo**, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por ??????????????, Γ é inconsistente. Isso contradiz a suposição de que Γ é consistente. Logo, não pode ser o caso que $\varphi \notin \Gamma$, de modo que $\varphi \in \Gamma$.

2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$:

Para a direção direta, suponha $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$. Então por ??????????????, item (1), $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$. Por (1), $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$, como requerido.

Para a direção reversa, sejam $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$. Por ??????????????, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. Por (1), $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$.

3. Primeiro mostramos que, se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, então $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$. Suponha $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ mas $\varphi \notin \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Como Γ é **completo**, $\neg\varphi \in \Gamma$ e $\neg\psi \in \Gamma$. Por **????????????????**, item (1), Γ é inconsistente, uma contradição. Logo, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Para a direção reversa, suponha que $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$. Por **????????????????**, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. Por **(1)**, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, como requerido.

4. Para a direção direta, suponha $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ e suponha, ao contrário, que $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Sob essas suposições, $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ e $\varphi \in \Gamma$. Por **????????????????**, item (1), $\Gamma \vdash \psi$. Mas então, por **(1)**, $\psi \in \Gamma$, contradizendo a suposição de que $\psi \notin \Gamma$.

Para a direção reversa, considere primeiro o caso em que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é **completo**, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por **????????????????**, item (2), $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Novamente por **(1)**, obtemos que $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, como requerido.

Agora considere o caso em que $\psi \in \Gamma$. Por **????????????????**, item (2) novamente, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Por **(1)**, $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$. $\square$

Problema com.1. Complete a prova de **Proposição com.2**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas