

com.1 Uma Prova Direta do Teorema da Compacidade

fol:com:cpd:
sec

Podemos provar o Teorema da Compacidade diretamente, sem apelar ao Teorema da Completude, usando as mesmas ideias da prova do teorema da completude. Na prova do Teorema da Completude, começamos com um conjunto Γ consistente de **sentenças**, expandimos-o para um conjunto Γ^* de **sentenças** consistente, saturado, e **completo**, e então mostramos que no modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ construído a partir de Γ^* , todas as **sentenças** de Γ são verdadeiras, de modo que Γ é satisfatível.

Podemos usar o mesmo método para mostrar que um conjunto finitamente satisfatível de sentenças é satisfatível. Só temos que provar as versões correspondentes dos resultados que levam ao lema da verdade, substituindo “consistente” por “finitamente satisfatível”.

fol:com:cpd:
prop:fsat-ccs

Proposição com.1. *Suponha que Γ é **completo** e finitamente satisfatível. Então:*

1. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, tanto $\varphi \in \Gamma$ quanto $\psi \in \Gamma$.
2. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.
3. $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Problema com.1. Prove **Proposição com.1**. Evite o uso de $\vdash$.

fol:com:cpd:
lem:fsat-henkin

Lema com.2. *Todo conjunto finitamente satisfatível Γ pode ser estendido a um conjunto saturado finitamente satisfatível Γ' .*

Problema com.2. Prove **Lema com.2**. (Dica: o passo crucial é mostrar que se Γ_n é finitamente satisfatível, então $\Gamma_n \cup \{\theta_n\}$ também o é, sem qualquer apelo a **derivações** ou consistência.)

fol:com:cpd:
prop:fsat-instances

Proposição com.3. *Suponha que Γ é **completo**, finitamente satisfatível e saturado.*

1. $\exists x \varphi(x) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi(t) \in \Gamma$ para pelo menos um termo fechado t .
2. $\forall x \varphi(x) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi(t) \in \Gamma$ para todos os termos fechados t .

Problema com.3. Prove **Proposição com.3**.

fol:com:cpd:
lem:fsat-lindenbaum

Lema com.4. *Todo conjunto finitamente satisfatível Γ pode ser estendido a um conjunto **completo** e finitamente satisfatível Γ^* .*

Problema com.4. Prove **Lema com.4**. (Dica: o passo crucial é mostrar que se Γ_n é finitamente satisfatível, então ou $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ ou $\Gamma_n \cup \{\neg \varphi_n\}$ é finitamente satisfatível.)

Teorema com.5 (Compacidade). Γ é satisfatível se, e somente se, é finitamente satisfatível. fol:com:cpd:
thm:compactness-direct

Prova. Se Γ é satisfatível, então há a estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$. É claro que esta $\mathfrak{M}$ também satisfaz todo subconjunto finito de Γ , de modo que Γ é finitamente satisfatível.

Agora suponha que Γ é finitamente satisfatível. Por **Lema com.2**, há um conjunto finitamente satisfatível e saturado $\Gamma' \supseteq \Gamma$. Por **Lema com.4**, Γ' pode ser estendido a um conjunto completo e finitamente satisfatível Γ^* , e Γ^* ainda é saturado. Construa o modelo de termos $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ como em ???. Note que ??? não dependeu do fato de que Γ^* é consistente (ou completo ou saturado, aliás), mas apenas do fato de que $\mathfrak{M}(\Gamma^*)$ é coberta. A prova do Lema da Verdade (??) funciona se substituírmos referências a ?? e ?? por referências a **Proposição com.1** e **Proposição com.3** □

Problema com.5. Escreva a prova completa do Lema da Verdade (??) na versão necessária para a prova de **Teorema com.5**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas