

byd.1 Lógica de Segunda Ordem

fol:byd:sol:
sec

A linguagem da lógica de segunda ordem permite quantificar não apenas sobre a **domínio** de indivíduos, mas também sobre relações nesse **domínio**. Dada uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$, para cada k adiciona-se **variáveis** R que variam sobre relações k -árias, e permite-se quantificação sobre essas variáveis. Se R é a **variável** para uma relação k -ária, e $t_1, \dots, t_k$ são termos ordinários (de primeira ordem), $R(t_1, \dots, t_k)$ é uma **fórmula** atômica. Caso contrário, o conjunto de **fórmulas** é definido exatamente como no caso da lógica de primeira ordem, com cláusulas adicionais para quantificação de segunda ordem. Note que temos apenas a **predicado de identidade** para termos de primeira ordem: se R e S são **variáveis** de relação de mesma aridade k , podemos definir $R = S$ como uma abreviação de

$$\forall x_1 \dots \forall x_k (R(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow S(x_1, \dots, x_k)).$$

As regras para a lógica de segunda ordem simplesmente estendem as regras de quantificadores às novas variáveis de segunda ordem. Aqui, porém, é preciso ter um pouco de cuidado para explicar como essas variáveis interagem com os **símbolos de predicado** de $\mathcal{L}$, e com **fórmulas** de $\mathcal{L}$ de modo mais geral. No mínimo, variáveis de relação contam como termos, de modo que temos inferências da forma

$$\varphi(R) \vdash \exists R \varphi(R)$$

Mas se $\mathcal{L}$ é a linguagem da aritmética com um símbolo de relação constante $<$, também esperaríamos que a seguinte inferência fosse válida:

$$x < y \vdash \exists R R(x, y)$$

ou, para uma dada **fórmula** φ ,

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) \vdash \exists R R(x_1, \dots, x_k)$$

Mais geralmente, podemos querer permitir inferências da forma

$$\varphi[\lambda \vec{x}. \psi(\vec{x})/R] \vdash \exists R \varphi$$

onde $\varphi[\lambda \vec{x}. \psi(\vec{x})/R]$ denota o resultado de substituir cada **fórmula** atômica da forma $Rt_1, \dots, t_k$ em φ por $\psi(t_1, \dots, t_k)$. Esta última regra é equivalente a ter um *esquema de compreensão*, isto é, um axioma da forma

$$\exists R \forall x_1, \dots, x_k (\varphi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow R(x_1, \dots, x_k)),$$

um para cada **fórmula** φ na linguagem de segunda ordem, em que R não é uma variável livre. (Exercício: mostre que se R for permitida em φ , esse esquema é inconsistente!)

Quando lógicos se referem aos “axiomas da lógica de segunda ordem”, geralmente querem dizer a extensão mínima da lógica de primeira ordem pelas

regras de quantificadores de segunda ordem juntamente com o esquema de compreensão. Mas é frequentemente interessante estudar subsistemas mais fracos desses axiomas e regras. Por exemplo, note que em toda a sua generalidade o esquema de axiomas de compreensão é *impredicativo*: ele permite afirmar a existência de uma relação $R(x_1, \dots, x_k)$ que é “definida” por **a fórmula** com quantificadores de segunda ordem; e esses quantificadores variam sobre o conjunto de todas essas relações—um conjunto que inclui R em si! Por volta da virada do século XX, uma reação comum ao paradoxo de Russell foi atribuir a culpa a tais definições e evitá-las ao desenvolver os fundamentos da matemática. Se se proíbe o uso de quantificadores de segunda ordem na **fórmula** φ , tem-se uma forma *predicativa* de compreensão, que é um pouco mais fraca.

Do ponto de vista semântico, pode-se pensar em uma **estrutura** de segunda ordem como consistindo em uma **estrutura** de primeira ordem para a linguagem, juntamente com um conjunto de relações no **domínio** sobre o qual variem os quantificadores de segunda ordem (mais precisamente, para cada k há um conjunto de relações de aridade k). É claro que, se a compreensão estiver incluída no sistema de **derivação**, então temos o requisito adicional de que há relações suficientes na “parte de segunda ordem” para satisfazer os axiomas de compreensão—caso contrário, o sistema de **derivação** não é correto! Uma maneira fácil de garantir que há relações suficientes é tomar a parte de segunda ordem como consistindo de *todas* as relações sobre a parte de primeira ordem. Uma tal **estrutura** é chamada *plena*, e, de certo modo, é realmente a “**estrutura** pretendida” para a linguagem. Se restringirmos a atenção a **estruturas** plenas, temos o que se conhece como a semântica de segunda ordem *plena*. Nesse caso, especificar uma **estrutura** reduz-se a especificar a parte de primeira ordem, pois o conteúdo da parte de segunda ordem segue disso implicitamente.

Para resumir, há certa ambiguidade ao falar de lógica de segunda ordem. Em termos do sistema de **derivação**, pode-se ter em mente

1. Um sistema de **derivação** de segunda ordem “mínimo”, juntamente com alguns axiomas de compreensão.
2. O sistema de **derivação** de segunda ordem “padrão”, com compreensão plena.

Em termos da semântica, pode interessar

1. A semântica “fraca”, em que **a estrutura** consiste em uma parte de primeira ordem, juntamente com uma parte de segunda ordem grande o suficiente para satisfazer os axiomas de compreensão.
2. A semântica de segunda ordem “padrão”, em que se consideram apenas **estruturas** plenas.

Quando lógicos não especificam o sistema de **derivação** ou a semântica que têm em mente, geralmente se referem ao segundo item de cada lista. A vantagem de usar essa semântica é que, como veremos, ela nos dá descrições categóricas de muitas **estruturas** matemáticas naturais; ao mesmo tempo, o sistema de

derivação é bastante forte, e correto para essa semântica. A desvantagem é que o sistema de **derivação** não é completo para a semântica; de fato, *nenhum* sistema de **derivação** efetivamente dado é completo para a semântica plena de segunda ordem. Por outro lado, veremos que o sistema de **derivação** é completo para a semântica enfraquecida; isso implica que, se uma sentença não for demonstrável, então há *alguma estrutura*, não necessariamente a plena, na qual ela é falsa.

A linguagem da lógica de segunda ordem é bastante rica. Pode-se identificar relações unárias com subconjuntos do **domínio**, e assim, em particular, pode-se quantificar sobre esses conjuntos; por exemplo, pode-se expressar indução para os números naturais com um único axioma

$$\forall R ((R(0) \wedge \forall x (R(x) \rightarrow R(x')))) \rightarrow \forall x R(x)).$$

Se se toma a linguagem da aritmética com os símbolos $0, ', +, \times$ e $<$, pode-se adicionar os seguintes axiomas para descrever seu comportamento:

1. $\forall x \neg x' = 0$
2. $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$
3. $\forall x (x + 0) = x$
4. $\forall x \forall y (x + y') = (x + y)'$
5. $\forall x (x \times 0) = 0$
6. $\forall x \forall y (x \times y') = ((x \times y) + x)$
7. $\forall x \forall y (x < y \leftrightarrow \exists z y = (x + z'))$

Não é difícil mostrar que esses axiomas, juntamente com o axioma de indução acima, fornecem uma descrição categórica da **estrutura** $\mathfrak{N}$, o modelo padrão da aritmética, desde que estejamos usando a semântica plena de segunda ordem. Dada qualquer **estrutura** $\mathfrak{M}$ na qual esses axiomas são verdadeiros, defina uma função f de $\mathbb{N}$ para o **domínio** de $\mathfrak{M}$ usando recursão ordinária em $\mathbb{N}$, de modo que $f(0) = 0^{\mathfrak{M}}$ e $f(x+1) = f(x)'$. Usando indução ordinária em $\mathbb{N}$ e o fato de que os axiomas (1) e (2) valem em $\mathfrak{M}$, vemos que f é **injetiva**. Para ver que f é **sobrejetiva**, seja P o conjunto de elementos de $|\mathfrak{M}|$ que estão no alcance de f . Como $\mathfrak{M}$ é plena, P está no **domínio** de segunda ordem. Pela construção de f , sabemos que $0^{\mathfrak{M}}$ está em P , e que P é fechado sob $'^{\mathfrak{M}}$. O fato de que o axioma de indução vale em $\mathfrak{M}$ (em particular, para P) garante que P é igual a todo o **domínio** de primeira ordem de $\mathfrak{M}$. Isso mostra que f é **uma bijeção**. Mostrar que f é um homomorfismo não é mais difícil, usando indução ordinária em $\mathbb{N}$ repetidamente.

Em termos teórico-conjuntistas, uma função é apenas um tipo especial de relação; por exemplo, uma função unária f pode ser identificada com uma relação binária R que satisfaz $\forall x \exists! y R(x, y)$. Como resultado, pode-se também quantificar sobre funções. Usando a semântica plena, pode-se então definir a

classe de **estruturas** infinitas como a classe de **estruturas** $\mathfrak{M}$ para as quais há uma função injetiva do **domínio** de $\mathfrak{M}$ para um subconjunto próprio de si mesma:

$$\exists f (\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \exists y \forall x f(x) \neq y).$$

A negação dessa sentença define então a classe de **estruturas** finitas.

Além disso, pode-se definir a classe de ordens bem-fundadas, adicionando o seguinte à definição de uma ordenação linear:

$$\forall P (\exists x P(x) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y (y < x \rightarrow \neg P(y)))).$$

Isso afirma que todo conjunto não vazio tem um elemento mínimo, módulo a identificação de “conjunto” com “relação unária”. Como outro exemplo, pode-se expressar a noção de conexidade para grafos, dizendo que não há separação não trivial dos vértices em partes desconectadas:

$$\neg \exists A (\exists x A(x) \wedge \exists y \neg A(y) \wedge \forall w \forall z ((A(w) \wedge \neg A(z)) \rightarrow \neg R(w, z))).$$

Como mais um exemplo, pode-se tentar, como exercício, definir a classe de **estruturas** finitas cujo **domínio** tem tamanho par. De modo ainda mais impressionante, pode-se fornecer uma descrição categórica dos números reais como um corpo ordenado completo que contém os racionais.

Em suma, a lógica de segunda ordem é muito mais expressiva do que a lógica de primeira ordem. Essa é a boa notícia; agora a má. Já mencionamos que não há sistema de **derivação** efetivo que seja completo para a semântica plena de segunda ordem. Para o bem ou para o mal, muitas das propriedades da lógica de primeira ordem estão ausentes, incluindo compacidade e os teoremas de Löwenheim–Skolem.

Por outro lado, se se está disposto a abrir mão da semântica plena de segunda ordem em favor da mais fraca, então o sistema de **derivação** mínimo de segunda ordem é completo para essa semântica. Em outras palavras, se lemos $\vdash$ como “demonstra no sistema mínimo” e $\models$ como “implica logicamente na semântica fraca”, podemos mostrar que sempre que $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$. Se se quer incluir axiomas específicos de compreensão no sistema de **derivação**, é preciso restringir a semântica a **estruturas** de segunda ordem que satisfaçam esses axiomas: por exemplo, se Δ consiste em um conjunto de axiomas de compreensão (possivelmente todos eles), temos que, se $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$. Em particular, se φ não for demonstrável usando os axiomas de compreensão que estamos considerando, então há um modelo de $\neg \varphi$ no qual esses axiomas de compreensão ainda assim valem.

A maneira mais fácil de ver que o teorema de completude vale para a semântica fraca é pensar na lógica de segunda ordem como uma lógica de múltiplas ordenações, da seguinte forma. Uma ordenação é interpretada como o **domínio** ordinário de “primeira ordem”, e então, para cada k , temos a **domínio** de “relações de aridade k .” Tomamos a linguagem com símbolos de relação incorporados “ $verd_k(R, x_1, \dots, x_k)$ ”, destinados a afirmar que R vale de $x_1, \dots, x_k$, onde R é uma variável da ordenação “relação k -ária” e $x_1, \dots, x_k$ são objetos da ordenação de primeira ordem.

Com essa identificação, a semântica fraca de segunda ordem é essencialmente a semântica usual da lógica de múltiplas ordenações; e já observamos que a lógica de múltiplas ordenações pode ser embutida na lógica de primeira ordem. Módulo as traduções de ida e volta, então, a concepção mais fraca de lógica de segunda ordem é realmente uma forma disfarçada de lógica de primeira ordem, em que o domínio contém tanto “objetos” quanto “relações” governados pelos axiomas apropriados.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas