

byd.1 Lógicas Modais

fol:byd:mod: Considera o seguinte exemplo de uma sentença condicional:
sec

Se Jeremy está sozinho naquela sala, então ele está bêbado, nu e dançando nas cadeiras.

Este é um exemplo de uma asserção condicional que pode ser materialmente verdadeira, mas ainda assim enganosa, pois parece sugerir que há um vínculo mais forte entre o antecedente e a conclusão do que simplesmente o fato de que ou o antecedente é falso ou a conclusão é verdadeira. Ou seja, a formulação sugere que a afirmação não é apenas verdadeira neste mundo particular (onde pode ser trivialmente verdadeira, porque Jeremy não está sozinho na sala), mas que, além disso, a conclusão *teria sido* verdadeira *se* o antecedente tivesse sido verdadeiro. Em outras palavras, pode-se tomar a asserção como significando que a afirmação é verdadeira não apenas neste mundo, mas em qualquer mundo “possível”; ou que ela é *necessariamente* verdadeira, em oposição a ser apenas verdadeira neste mundo particular.

A lógica modal foi concebida para dar sentido a esse tipo de necessidade. Obtém-se a lógica proposicional modal a partir da lógica proposicional ordinária adicionando um operador caixa; isto é, se φ é a fórmula, então $\Box\varphi$ também o é. Intuitivamente, $\Box\varphi$ afirma que φ é *necessariamente* verdadeira, ou verdadeira em qualquer mundo possível. $\Diamond\varphi$ é usualmente tomada como abreviação de $\neg\Box\neg\varphi$, e pode ser lida como afirmando que φ é *possivelmente* verdadeira. É claro que a modalidade também pode ser adicionada à lógica de predicados.

Estruturas de Kripke podem ser usadas para fornecer uma semântica para a lógica modal; de fato, Kripke projetou essa semântica tendo a lógica modal em mente. Em vez de restringir a ordens parciais, de modo mais geral tem-se um conjunto de “mundos possíveis”, P , e uma relação binária de “acessibilidade” $R(x, y)$ entre mundos. Intuitivamente, $R(p, q)$ afirma que o mundo q é compatível com p ; isto é, se estamos “em” o mundo p , temos que considerar a possibilidade de que o mundo pudesse ter sido como q .

A lógica modal é às vezes chamada de lógica “intensional”, em oposição a uma “extensional”. A semântica pretendida para uma lógica extensional, como a lógica clássica, refere-se apenas a um único mundo, o “atual”; enquanto a semântica para uma lógica “intensional” depende de uma ontologia mais elaborada. Além de estruturar a necessidade, pode-se usar a modalidade para estruturar outras construções linguísticas, reinterpretando $\Box$ e $\Diamond$ de acordo com a aplicação. Por exemplo:

1. Na lógica de demonstrabilidade, $\Box\varphi$ é lida como “ φ é demonstrável” e $\Diamond\varphi$ é lida como “ φ é consistente”.
2. Na lógica epistêmica, pode-se ler $\Box\varphi$ como “eu sei φ ” ou “eu acredito em φ ”.

3. Na lógica temporal, pode-se ler $\Box\varphi$ como “ φ é sempre verdadeira” e $\Diamond\varphi$ como “ φ é às vezes verdadeira”.

Gostaríamos de aumentar a lógica com regras e axiomas que lidem com modalidade. Por exemplo, o sistema **S4** consiste nos axiomas e regras ordinários da lógica proposicional, juntamente com os seguintes axiomas:

$$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$$

$$\Box\varphi \rightarrow \varphi$$

$$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$$

assim como uma regra, “de φ conclua $\Box\varphi$.” **S5** adiciona o seguinte axioma:

$$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

Variações desses axiomas podem ser adequadas para diferentes aplicações; por exemplo, S5 é usualmente tomado para caracterizar a noção de necessidade lógica. E o aspecto agradável é que se pode usualmente encontrar uma semântica para a qual o sistema de **derivação** é correto e completo, restringindo a relação de acessibilidade nas **estruturas** de Kripke de maneiras naturais. Por exemplo, **S4** corresponde à classe de **estruturas** de Kripke em que a relação de acessibilidade é reflexiva e transitiva. **S5** corresponde à classe de **estruturas** de Kripke em que a relação de acessibilidade é *universal*, isto é, todo mundo é acessível a partir de qualquer outro; assim $\Box\varphi$ vale se, e somente se, φ vale em todo mundo.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas