

byd.1 Lógica de Múltiplas Ordenações

fol:byd:msl:
sec

Na lógica de primeira ordem, variáveis e quantificadores variam sobre um único **domínio**. Mas é frequentemente útil ter vários **domínios** (disjuntos): por exemplo, pode-se querer ter **a domínio** de números, **a domínio** de objetos geométricos, **a domínio** de funções de números para números, **a domínio** de grupos abelianos, e assim por diante.

A lógica de múltiplas ordenações fornece esse tipo de arcabouço. Começa-se com uma lista de “ordenações”—a “ordenação” de um objeto indica o “domínio” que ele deveria habitar. Tem-se então **variáveis** e quantificadores para cada ordenação e (geralmente) uma **predicado de identidade** para cada ordenação. Funções e relações também são “tipadas” pelas ordenações dos objetos que podem receber como argumentos. Caso contrário, mantêm-se as regras usuais da lógica de primeira ordem, com versões das regras de quantificadores repetidas para cada ordenação.

Por exemplo, para estudar relações internacionais, poderíamos escolher uma linguagem com dois tipos de objetos, cidadãos franceses e cidadãos alemães. Poderíamos ter uma relação unária, “bebe vinho”, para objetos da primeira ordenação; outra relação unária, “come wurst”, para objetos da segunda ordenação; e uma relação binária, “forma um casal multinacional”, que recebe dois argumentos, onde o primeiro argumento é da primeira ordenação e o segundo argumento é da segunda ordenação. Se usarmos variáveis a, b, c para variar sobre cidadãos franceses e x, y, z para variar sobre cidadãos alemães, então

$$\forall a \forall x [(CasadoCom(a, x) \rightarrow (BebeVinho(a) \vee \neg ComeWurst(x)))]$$

afirma que, se algum francês for casado com um alemão, ou o francês bebe vinho ou o alemão não come wurst.

A lógica de múltiplas ordenações pode ser embutida na lógica de primeira ordem de maneira natural, reunindo todos os objetos dos **domínios** de múltiplas ordenações em um único **domínio** de primeira ordem, usando **símbolos de predicado** unários para acompanhar as ordenações e relativizando quantificadores. Por exemplo, a linguagem de primeira ordem correspondente ao exemplo acima teria **símbolos de predicado** unários “*Alemao*” e “*Frances*”, além das outras relações descritas, com os requisitos de ordenação eliminados. Um quantificador ordenado $\forall x \varphi$, onde x é **a variável** da ordenação alemã, traduz-se para

$$\forall x (Alemao(x) \rightarrow \varphi).$$

Precisamos adicionar axiomas que garantam que as ordenações sejam separadas—por exemplo, $\forall x \neg (Alemao(x) \wedge Frances(x))$ —, bem como axiomas que garantam que “bebe vinho” só vale de objetos que satisfazem o **símbolo de predicado** *Frances*(x), etc. Com essas convenções e axiomas, não é difícil mostrar que **sentenças** de múltiplas ordenações traduzem-se em **sentenças** de primeira ordem, e **derivações** de múltiplas ordenações traduzem-se em **derivações** de primeira ordem. Além disso, **estruturas** de múltiplas ordenações “traduzem-se” em **estruturas** de primeira ordem correspondentes e vice-versa, de modo

que também temos um teorema de completude para a lógica de múltiplas ordenações.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas