

byd.1 Lógica Intuicionista

fol:byd:il:
sec

Em contraste com a lógica de segunda ordem e de ordem superior, a lógica intuicionista de primeira ordem representa uma restrição da versão clássica, destinada a modelar um tipo de raciocínio mais “construtivo”. Os exemplos a seguir podem ilustrar algumas das motivações subjacentes.

Suponha que alguém se aproximasse de você um dia e anunciasse que havia determinado um número natural x , com a propriedade de que se x é primo, a hipótese de Riemann é verdadeira, e se x é composto, a hipótese de Riemann é falsa. Ótimas notícias! Se a hipótese de Riemann é verdadeira ou não é uma das grandes questões em aberto da matemática, e aqui parecem ter reduzido o problema a um cálculo, isto é, à determinação de se um número específico é primo ou não.

Qual é o valor mágico de x ? Eles o descrevem assim: x é o número natural que é igual a 7 se a hipótese de Riemann é verdadeira, e 9 caso contrário.

Com raiva, você exige seu dinheiro de volta. De um ponto de vista clássico, a descrição acima de fato determina um valor único de x ; mas o que você realmente quer é um valor de x que seja dado *explicitamente*.

Para tomar outro exemplo, talvez menos artificial, considere a seguinte questão. Sabemos que é possível elevar um número irracional a uma potência racional e obter um resultado racional. Por exemplo, $\sqrt{2}^2 = 2$. O que é menos claro é se é possível elevar um número irracional a uma potência *irracional* e obter um resultado racional. O seguinte teorema responde afirmativamente:

Teorema byd.1. *Existem números irracionais a e b tais que a^b é racional.*

Prova. Considere $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se isto é racional, terminamos: podemos tomar $a = b = \sqrt{2}$. Caso contrário, é irracional. Então temos

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

que é certamente racional. Assim, neste caso, tome a como $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e b como $\sqrt{2}$. $\square$

Isso constitui uma prova válida? A maioria dos matemáticos sente que sim. Mas, novamente, há algo um pouco insatisfatório aqui: provamos a existência de um par de números reais com uma certa propriedade, sem poder dizer *qual* par de números é. É possível provar o mesmo resultado, mas de tal forma que o par a, b é dado na prova: tome $a = \sqrt{3}$ e $b = \log_3 4$. Então

$$a^b = \sqrt{3}^{\log_3 4} = 3^{1/2 \cdot \log_3 4} = (3^{\log_3 4})^{1/2} = 4^{1/2} = 2,$$

pois $3^{\log_3 x} = x$.

A lógica intuicionista foi concebida para modelar um tipo de raciocínio no qual movimentos como o da primeira prova são proibidos. Provar a existência de um x que satisfaz $\varphi(x)$ significa que se deve fornecer um x específico e uma

prova de que ele satisfaz φ , como na segunda prova. Provar que φ ou ψ vale requer que se possa provar um ou outro.

Formalmente falando, a lógica intuicionista de primeira ordem é o que se obtém se se restringe um sistema de **derivação** para a lógica de primeira ordem de certa maneira. Similarmente, há versões intuicionistas da lógica de segunda ou de ordem superior. Do ponto de vista matemático, estes são apenas sistemas dedutivos formais, mas, como já observado, são destinados a modelar um tipo de raciocínio matemático. Pode-se tomar isso como o tipo de raciocínio justificado por uma certa visão filosófica da matemática (como o intuicionismo de Brouwer); pode-se tomá-lo como um tipo de raciocínio matemático mais “concreto” e satisfatório (na linha do construtivismo de Bishop); e pode-se discutir se a descrição formal captura ou não a motivação informal. Mas quaisquer que sejam as posições filosóficas que possamos ter, podemos estudar a lógica intuicionista como uma lógica formalmente apresentada; e por quaisquer razões, muitos lógicos matemáticos acham interessante fazê-lo.

Há uma interpretação construtiva informal dos conectivos intuicionistas, usualmente conhecida como interpretação BHK (em homenagem a Brouwer, Heyting e Kolmogorov). Ela funciona assim: uma prova de $\varphi \wedge \psi$ consiste em uma prova de φ emparelhada com uma prova de ψ ; uma prova de $\varphi \vee \psi$ consiste em uma prova de φ , ou uma prova de ψ , onde temos informação explícita sobre qual é o caso; uma prova de $\varphi \rightarrow \psi$ consiste em um procedimento que transforma uma prova de φ em uma prova de ψ ; uma prova de $\forall x \varphi(x)$ consiste em um procedimento que retorna uma prova de $\varphi(x)$ para qualquer valor de x ; e uma prova de $\exists x \varphi(x)$ consiste em um valor de x , juntamente com uma prova de que esse valor satisfaz φ . Pode-se descrever a interpretação em termos computacionais conhecidos como o “isomorfismo de Curry–Howard” ou o “paradigma **fórmulas**-como-tipos”: pense em **a fórmula** como especificando um certo tipo de dado, e provas como objetos computacionais desses tipos de dados que nos permitem ver que a **fórmula** correspondente é verdadeira.

A lógica intuicionista é frequentemente pensada como a lógica clássica “menos” a lei do terceiro excluído. O seguinte teorema torna isso mais preciso.

Teorema byd.2. *Intuicionisticamente, os seguintes esquemas de axiomas são equivalentes:*

1. $(\neg\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi$.
2. $\varphi \vee \neg\varphi$
3. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

Obter instâncias de um esquema a partir de qualquer um dos outros é um bom exercício em lógica intuicionista.

Os primeiros sistemas dedutivos para a lógica proposicional intuicionista, apresentados como formalizações do intuicionismo de Brouwer, são devidos, independentemente, a Kolmogorov, Glivenko e Heyting. A primeira formalização da lógica intuicionista de primeira ordem (e partes da matemática intuicionista)

é devida a Heyting. Embora vários esquemas válidos clássicamente não sejam válidos intuicionisticamente, muitos o são.

A *tradução de dupla negação* descreve uma relação importante entre a lógica clássica e a intuicionista. Ela é definida indutivamente da seguinte forma (pense em φ^N como a tradução “intuicionista” da fórmula clássica φ):

$$\begin{aligned}\varphi^N &\equiv \neg\neg\varphi \quad \text{para fórmulas atômicas } \varphi \\ (\varphi \wedge \psi)^N &\equiv (\varphi^N \wedge \psi^N) \\ (\varphi \vee \psi)^N &\equiv \neg\neg(\varphi^N \vee \psi^N) \\ (\varphi \rightarrow \psi)^N &\equiv (\varphi^N \rightarrow \psi^N) \\ (\forall x \varphi)^N &\equiv \forall x \varphi^N \\ (\exists x \varphi)^N &\equiv \neg\neg\exists x \varphi^N\end{aligned}$$

Kolmogorov e Glivenko tiveram versões dessa tradução para a lógica proposicional; para a lógica de predicados, é devida a Gödel e Gentzen, independentemente. Temos

Teorema byd.3. 1. $\varphi \leftrightarrow \varphi^N$ é demonstrável classicamente

2. Se φ é demonstrável classicamente, então φ^N é demonstrável intuicionisticamente.

Podemos agora imaginar o seguinte diálogo. Matemático clássico: “Provei φ !” Matemático intuicionista: “Sua prova não é válida. O que você realmente provou é φ^N .” Matemático clássico: “Tudo bem para mim!” Quanto ao matemático clássico, o intuicionista está apenas sendo minucioso, pois os dois são equivalentes. Mas o intuicionista insiste que há uma diferença.

Note que a tradução acima diz respeito apenas à lógica pura; ela não aborda a questão de quais são os axiomas *não lógicos* adequados para a matemática clássica e intuicionista, ou qual é a relação entre eles. Mas a seguinte extensão ligeira do teorema acima fornece alguma informação útil:

Teorema byd.4. Se Γ prova φ classicamente, então Γ^N prova φ^N intuicionisticamente.

Em outras palavras, se φ é demonstrável a partir de algumas hipóteses classicamente, então φ^N é demonstrável a partir de suas traduções de dupla negação.

Para mostrar que uma sentença ou fórmula proposicional é intuicionisticamente válida, basta fornecer uma prova. Mas como se pode mostrar que ela não é válida? Para esse propósito, precisamos de uma semântica que seja correta e, de preferência, completa. Uma semântica devida a Kripke se encaixa bem.

Podemos jogar o mesmo jogo que fizemos para a lógica clássica: definir a semântica e provar correção e completude. Vale a pena, no entanto, notar a seguinte distinção. No caso da lógica clássica, a semântica era a “óbvia”, num sentido implícito no significado dos conectivos. Embora se possa fornecer

alguma motivação intuitiva para a semântica de Kripke, esta não oferece o mesmo sentimento de inevitabilidade. Além disso, a noção de **estrutura** clássica é uma noção matemática natural, de modo que podemos ou tomar a noção de **estrutura** como uma ferramenta para estudar a lógica clássica de primeira ordem, ou tomar a lógica clássica de primeira ordem como uma ferramenta para estudar **estruturas** matemáticas. Em contraste, as **estruturas** de Kripke só podem ser vistas como um construto lógico; elas não parecem ter interesse matemático independente.

Uma **estrutura** de Kripke $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ para uma linguagem proposicional consiste em um conjunto W , uma ordem parcial R em W com um menor **membro**, e uma atribuição “monótona” de variáveis proposicionais aos **membros** de W . A intuição é que os **membros** de W representam “mundos”, ou “estados de conhecimento”; um elemento $v \geq u$ representa um “possível estado futuro” de u ; e as variáveis proposicionais atribuídas a u são as proposições que se sabe serem verdadeiras no estado u . A relação de forçamento $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ estende essa relação a **fórmulas** arbitrárias na linguagem; leia $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ como “ φ é verdadeira no estado w .” A relação é definida indutivamente, da seguinte forma:

1. $\mathfrak{M}, w \Vdash p_i$ se, e somente se, p_i é uma das variáveis proposicionais atribuídas a w .
2. $\mathfrak{M}, w \nVdash \perp$.
3. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \wedge \psi)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ e $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$.
4. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \vee \psi)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ou $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$.
5. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ se, e somente se, sempre que $w' \geq w$ e $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$, então $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$.

É um bom exercício tentar mostrar que $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ não é intuitionisticamente válida, preparando uma **estrutura** de Kripke que forneça um contraexemplo.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas