

byd.1 Lógica de Ordem Superior

fol:byd:hol:
sec

Passar da lógica de primeira ordem para a de segunda ordem nos permitiu falar sobre conjuntos de objetos no **domínio** de primeira ordem, dentro da linguagem formal. Por que parar aí? Por exemplo, a lógica de terceira ordem deveria nos permitir lidar com conjuntos de conjuntos de objetos, ou talvez até conjuntos que contenham tanto objetos quanto conjuntos de objetos. E a lógica de quarta ordem nos permitirá falar sobre conjuntos de objetos desse tipo. Como se pode imaginar, pode-se iterar essa ideia arbitrariamente.

Na prática, a lógica de ordem superior é frequentemente formulada em termos de funções em vez de relações. (Módulo as identificações naturais, essa diferença é inessencial.) Dadas algumas “ordenações” básicas $A, B, C, \dots$ (que agora chamaremos de “tipos”), podemos criar novos estipulando

Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \rightarrow \tau$ também o é.

Pense nos tipos como “rótulos” sintáticos que classificam os objetos que queremos em nosso **domínio**; $\sigma \rightarrow \tau$ descreve aqueles objetos que são funções que levam objetos de tipo σ a objetos de tipo τ . Por exemplo, podemos querer ter um tipo Ω de valores de verdade, “verdadeiro” e “falso”, e um tipo $\mathbb{N}$ de números naturais. Nesse caso, pode-se pensar em objetos de tipo $\mathbb{N} \rightarrow \Omega$ como relações unárias, ou subconjuntos de $\mathbb{N}$; objetos de tipo $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ são funções de números naturais para números naturais; e objetos de tipo $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ são “funcionais”, isto é, funções de tipo superior que levam funções a números.

Como no caso da lógica de segunda ordem, pode-se pensar na lógica de ordem superior como uma espécie de lógica de múltiplas ordenações, em que há uma ordenação para cada tipo de objeto que queremos considerar. Mas é usualmente mais claro simplesmente definir a sintaxe da lógica de tipos superiores a partir dos fundamentos. Por exemplo, podemos definir um conjunto de tipos finitos indutivamente, da seguinte forma:

1. $\mathbb{N}$ é um tipo finito.
2. Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \rightarrow \tau$ também o é.
3. Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \times \tau$ também o é.

Intuitivamente, $\mathbb{N}$ denota o tipo dos números naturais, $\sigma \rightarrow \tau$ denota o tipo de funções de σ para τ , e $\sigma \times \tau$ denota o tipo de pares de objetos, um de σ e outro de τ . Podemos então definir um conjunto de termos indutivamente, da seguinte forma:

1. Para cada tipo σ , há um estoque de variáveis $x, y, z, \dots$ de tipo σ
2. o é um termo de tipo $\mathbb{N}$
3. S (sucessor) é um termo de tipo $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
4. Se s é um termo de tipo σ , e t é um termo de tipo $\mathbb{N} \rightarrow (\sigma \rightarrow \sigma)$, então R_{st} é um termo de tipo $\mathbb{N} \rightarrow \sigma$

5. Se s é um termo de tipo $\tau \rightarrow \sigma$ e t é um termo de tipo τ , então $s(t)$ é um termo de tipo σ
6. Se s é um termo de tipo σ e x é uma variável de tipo τ , então $\lambda x. s$ é um termo de tipo $\tau \rightarrow \sigma$.
7. Se s é um termo de tipo σ e t é um termo de tipo τ , então $\langle s, t \rangle$ é um termo de tipo $\sigma \times \tau$.
8. Se s é um termo de tipo $\sigma \times \tau$, então $p_1(s)$ é um termo de tipo σ e $p_2(s)$ é um termo de tipo τ .

Intuitivamente, R_{st} denota a função definida recursivamente por

$$\begin{aligned} R_{st}(0) &= s \\ R_{st}(x+1) &= t(x, R_{st}(x)), \end{aligned}$$

$\langle s, t \rangle$ denota o par cuja primeira componente é s e cuja segunda componente é t , e $p_1(s)$ e $p_2(s)$ denotam o primeiro e o segundo elementos (“projeções”) de s . Finalmente, $\lambda x. s$ denota a função f definida por

$$f(x) = s$$

para qualquer x de tipo σ ; assim o item (6) nos dá uma forma de compreensão, permitindo-nos definir funções usando termos. As **fórmulas** são construídas a partir de afirmações de **predicado de identidade** $s = t$ entre termos do mesmo tipo, dos conectivos proposicionais usuais e da quantificação de ordem superior. Pode-se então tomar os axiomas do sistema como as equações básicas que governam os termos definidos acima, juntamente com as regras usuais da lógica com quantificadores e **predicado de identidade**.

Se se aumenta o sistema de tipos finitos com um tipo Ω de valores de verdade, é preciso incluir axiomas que governem seu uso também. De fato, se se for astuto, pode-se eliminar **fórmulas** complexas inteiramente, substituindo-as por termos de tipo Ω ! O sistema de prova pode então ser modificado de acordo. O resultado é essencialmente a *teoria simples dos tipos* apresentada por Alonzo Church na década de 1930.

Como no caso da lógica de segunda ordem, há diferentes versões de semântica de tipos superiores que se pode querer usar. Na versão completa, variáveis de tipo $\sigma \rightarrow \tau$ variam sobre o conjunto de *todas* as funções dos objetos de tipo σ para objetos de tipo τ . Como se pode imaginar, essa semântica é forte demais para admitir um sistema de **derivação** completo e efetivo. Mas pode-se considerar uma semântica mais fraca, em que **a estrutura** consiste em conjuntos de elementos T_τ para cada tipo τ , juntamente com operações apropriadas para aplicação, projeção, etc. Se os detalhes forem desenvolvidos corretamente, pode-se obter teoremas de completude para os tipos de sistemas de **derivação** descritos acima.

A lógica de ordem superior é atraente porque fornece um arcabouço no qual podemos embutir boa parte da matemática de maneira natural: a partir de $\mathbb{N}$,

pode-se definir números reais, funções contínuas e assim por diante. É também particularmente atraente no contexto da lógica intuicionista, pois os tipos têm interpretações “construtivas” claras. De fato, pode-se desenvolver versões construtivas da semântica de tipos superiores (baseadas na lógica intuicionista, em vez da clássica) que esclarecem bastante essas interpretações construtivas e são, em muitos aspectos, mais interessantes do que as contrapartes clássicas.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas