Capítulo udf

Além da lógica de primeira ordem

Este capítulo, adaptado das notas de lógica de Jeremy Avigad, fornece o mais breve vislumbre de quais outros sistemas lógicos existem. Pretende ser um capítulo que sugere tópicos adicionais para estudo em um curso que não os cobre. Cada um dos tópicos mencionados aqui irá — espero — eventualmente receber seu próprio tratamento em nível de parte no Projeto Open Logic.

byd.1 Visão Geral

fol:byd:int:sec

A lógica de primeira ordem não é o único sistema de lógica de interesse: há muitas extensões e variações da lógica de primeira ordem. Uma lógica normalmente consiste na especificação formal de uma linguagem, geralmente, mas nem sempre, em um sistema dedutivo e, geralmente, mas nem sempre, em uma semântica pretendida. Mas o uso técnico do termo levanta uma pergunta óbvia: o que as lógicas que não são lógicas de primeira ordem têm a ver com a palavra "lógica", usada no sentido intuitivo ou filosófico? Todos os sistemas descritos abaixo são projetados para modelar o raciocínio de uma forma ou de outra; podemos dizer o que os torna lógicos?

Não há respostas fáceis. A palavra "lógica" é usada de diferentes maneiras e em diferentes contextos, e a noção, como a de "verdade", tem sido analisada a partir de numerosos posicionamentos filosóficos. Por exemplo, pode-se considerar que o objetivo do raciocínio lógico é a determinação de quais afirmações são necessariamente verdadeiras, verdadeiras a priori, verdadeiras independentemente da interpretação dos termos não lógicos, verdadeiras em virtude de sua forma, ou verdadeiras por convenção linguística; e cada uma dessas concepções requer bastante esclarecimento. Mesmo que se restrinja a atenção ao tipo de lógica usada na matemática, há pouco acordo quanto ao seu alcance. Por

exemplo, no *Principia Mathematica*, Russell e Whitehead tentaram desenvolver a matemática com base na lógica, na tradição *logicista* iniciada por Frege. Seu sistema de lógica era uma forma de lógica de tipo superior semelhante à descrita abaixo. No final, foram forçados a introduzir axiomas que, pela maioria dos padrões, não parecem puramente lógicos (notavelmente, o axioma do infinito e o axioma da redutibilidade), mas pode-se, ainda assim, sustentar que algumas formas de raciocínio de ordem superior devem ser aceitas como lógicas. Em contraste, Quine, cuja ontologia não admite "proposições" como objetos legítimos de discurso, argumenta que a lógica de segunda ordem e a de ordem superior são realmente manifestações da teoria dos conjuntos em pele de cordeiro; em outras palavras, sistemas que envolvem quantificação sobre predicados não são puramente lógicos.

Por enquanto, é melhor deixar tais questões filosóficas para um dia chuvoso e simplesmente pensar nos sistemas abaixo como idealizações formais de vários tipos de raciocínio, lógico ou não.

byd.2 Lógica de Múltiplas Ordenações

fol:byd:msl:sec

Na lógica de primeira ordem, variáveis e quantificadores variam sobre um único domínio. Mas é frequentemente útil ter vários domínios (disjuntos): por exemplo, pode-se querer ter a domínio de números, a domínio de objetos geométricos, a domínio de funções de números para números, a domínio de grupos abelianos, e assim por diante.

A lógica de múltiplas ordenações fornece esse tipo de arcabouço. Começa-se com uma lista de "ordenações"—a "ordenação" de um objeto indica o "domínio" que ele deveria habitar. Tem-se então variáveis e quantificadores para cada ordenação e (geralmente) uma predicado de identidade para cada ordenação. Funções e relações também são "tipadas" pelas ordenações dos objetos que podem receber como argumentos. Caso contrário, mantêm-se as regras usuais da lógica de primeira ordem, com versões das regras de quantificadores repetidas para cada ordenação.

Por exemplo, para estudar relações internacionais, poderíamos escolher uma linguagem com dois tipos de objetos, cidadãos franceses e cidadãos alemães. Poderíamos ter uma relação unária, "bebe vinho", para objetos da primeira ordenação; outra relação unária, "come wurst", para objetos da segunda ordenação; e uma relação binária, "forma um casal multinacional", que recebe dois argumentos, onde o primeiro argumento é da primeira ordenação e o segundo argumento é da segunda ordenação. Se usarmos variáveis a, b, c para variar sobre cidadãos franceses e x, y, z para variar sobre cidadãos alemães, então

$$\forall a \forall x[(\mathit{CasadoCom}(a,x) \to (\mathit{BebeVinho}(a) \vee \neg \mathit{ComeWurst}(x))]]$$

afirma que, se algum francês for casado com um alemão, ou o francês bebe vinho ou o alemão não come wurst.

A lógica de múltiplas ordenações pode ser embutida na lógica de primeira ordem de maneira natural, reunindo todos os objetos dos domínios de múltiplas ordenações em um único domínio de primeira ordem, usando símbolos de predicado unários para acompanhar as ordenações e relativizando quantificadores. Por exemplo, a linguagem de primeira ordem correspondente ao exemplo acima teria símbolos de predicado unários "Alemao" e "$\mathit{Frances}$", além das outras relações descritas, com os requisitos de ordenação eliminados. Um quantificador ordenado $\forall x\, \varphi$, onde x é a variável da ordenação alemã, traduz-se para

$$\forall x\, (\mathit{Alemao}(x) \to \varphi).$$

Precisamos adicionar axiomas que garantam que as ordenações sejam separadas—por exemplo, $\forall x\, \neg(\mathit{Alemao}(x) \land \mathit{Frances}(x))$—, bem como axiomas que garantam que "bebe vinho" só vale de objetos que satisfazem o símbolo de predicado $\mathit{Frances}(x)$, etc. Com essas convenções e axiomas, não é difícil mostrar que sentenças de múltiplas ordenações traduzem-se em sentenças de primeira ordem, e derivações de múltiplas ordenações traduzem-se em derivações de primeira ordem. Além disso, estruturas de múltiplas ordenações "traduzem-se" em estruturas de primeira ordem correspondentes e vice-versa, de modo que também temos um teorema de completude para a lógica de múltiplas ordenações.

byd.3 Lógica de Segunda Ordem

fol:byd:sol:sec

A linguagem da lógica de segunda ordem permite quantificar não apenas sobre a domínio de indivíduos, mas também sobre relações nesse domínio. Dada uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$, para cada k adiciona-se variáveis R que variam sobre relações k-árias, e permite-se quantificação sobre essas variáveis. Se R é a variável para uma relação k-ária, e $t_1, \ldots, t_k$ são termos ordinários (de primeira ordem), $R(t_1, \ldots, t_k)$ é uma fórmula atômica. Caso contrário, o conjunto de fórmulas é definido exatamente como no caso da lógica de primeira ordem, com cláusulas adicionais para quantificação de segunda ordem. Note que temos apenas a predicado de identidade para termos de primeira ordem: se R e S são variáveis de relação de mesma aridade k, podemos definir $R = S$ como uma abreviação de

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k\, (R(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow S(x_1, \ldots, x_k)).$$

As regras para a lógica de segunda ordem simplesmente estendem as regras de quantificadores às novas variáveis de segunda ordem. Aqui, porém, é preciso ter um pouco de cuidado para explicar como essas variáveis interagem com os símbolos de predicado de $\mathcal{L}$, e com fórmulas de $\mathcal{L}$ de modo mais geral. No mínimo, variáveis de relação contam como termos, de modo que temos inferências da forma

$$\varphi(R) \vdash \exists R\, \varphi(R)$$

Mas se $\mathcal{L}$ é a linguagem da aritmética com um símbolo de relação constante $<$, também esperaríamos que a seguinte inferência fosse válida:

$$x < y \vdash \exists R\, R(x, y)$$

ou, para uma dada fórmula φ,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \vdash \exists R\, R(x_1, \ldots, x_k)$$

Mais geralmente, podemos querer permitir inferências da forma

$$\varphi[\lambda \vec{x}.\, \psi(\vec{x})/R] \vdash \exists R\, \varphi$$

onde $\varphi[\lambda \vec{x}.\, \psi(\vec{x})/R]$ denota o resultado de substituir cada fórmula atômica da forma $Rt_1, \ldots, t_k$ em φ por $\psi(t_1, \ldots, t_k)$. Esta última regra é equivalente a ter um *esquema de compreensão*, isto é, um axioma da forma

$$\exists R \forall x_1, \ldots, x_k\, (\varphi(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow R(x_1, \ldots, x_k)),$$

um para cada fórmula φ na linguagem de segunda ordem, em que R não é uma variável livre. (Exercício: mostre que se R for permitida em φ, esse esquema é inconsistente!)

Quando lógicos se referem aos "axiomas da lógica de segunda ordem", geralmente querem dizer a extensão mínima da lógica de primeira ordem pelas regras de quantificadores de segunda ordem juntamente com o esquema de compreensão. Mas é frequentemente interessante estudar subsistemas mais fracos desses axiomas e regras. Por exemplo, note que em toda a sua generalidade o esquema de axiomas de compreensão é *impredicativo*: ele permite afirmar a existência de uma relação $R(x_1, \ldots, x_k)$ que é "definida" por a fórmula com quantificadores de segunda ordem; e esses quantificadores variam sobre o conjunto de todas essas relações—um conjunto que inclui R em si! Por volta da virada do século XX, uma reação comum ao paradoxo de Russell foi atribuir a culpa a tais definições e evitá-las ao desenvolver os fundamentos da matemática. Se se proíbe o uso de quantificadores de segunda ordem na fórmula φ, tem-se uma forma *predicativa* de compreensão, que é um pouco mais fraca.

Do ponto de vista semântico, pode-se pensar em uma estrutura de segunda ordem como consistindo em uma estrutura de primeira ordem para a linguagem, juntamente com um conjunto de relações no domínio sobre o qual variem os quantificadores de segunda ordem (mais precisamente, para cada k há um conjunto de relações de aridade k). É claro que, se a compreensão estiver incluída no sistema de derivação, então temos o requisito adicional de que há relações suficientes na "parte de segunda ordem" para satisfazer os axiomas de compreensão—caso contrário, o sistema de derivação não é correto! Uma maneira fácil de garantir que há relações suficientes é tomar a parte de segunda ordem como consistindo de *todas* as relações sobre a parte de primeira ordem. Uma tal estrutura é chamada *plena*, e, de certo modo, é realmente a "estrutura pretendida" para a linguagem. Se restringirmos a atenção a estruturas plenas, temos o que se conhece como a semântica de segunda ordem *plena*. Nesse caso,

especificar uma estrutura reduz-se a especificar a parte de primeira ordem, pois o conteúdo da parte de segunda ordem segue disso implicitamente.

Para resumir, há certa ambiguidade ao falar de lógica de segunda ordem. Em termos do sistema de derivação, pode-se ter em mente

1. Um sistema de derivação de segunda ordem "mínimo", juntamente com alguns axiomas de compreensão.
2. O sistema de derivação de segunda ordem "padrão", com compreensão plena.

Em termos da semântica, pode interessar

1. A semântica "fraca", em que a estrutura consiste em uma parte de primeira ordem, juntamente com uma parte de segunda ordem grande o suficiente para satisfazer os axiomas de compreensão.
2. A semântica de segunda ordem "padrão", em que se consideram apenas estruturas plenas.

Quando lógicos não especificam o sistema de derivação ou a semântica que têm em mente, geralmente se referem ao segundo item de cada lista. A vantagem de usar essa semântica é que, como veremos, ela nos dá descrições categóricas de muitas estruturas matemáticas naturais; ao mesmo tempo, o sistema de derivação é bastante forte, e correto para essa semântica. A desvantagem é que o sistema de derivação *não* é completo para a semântica; de fato, *nenhum* sistema de derivação efetivamente dado é completo para a semântica plena de segunda ordem. Por outro lado, veremos que o sistema de derivação *é* completo para a semântica enfraquecida; isso implica que, se uma sentença não for demonstrável, então há *alguma* estrutura, não necessariamente a plena, na qual ela é falsa.

A linguagem da lógica de segunda ordem é bastante rica. Pode-se identificar relações unárias com subconjuntos do domínio, e assim, em particular, pode-se quantificar sobre esses conjuntos; por exemplo, pode-se expressar indução para os números naturais com um único axioma

$$\forall R\,((R(\mathsf{0}) \wedge \forall x\,(R(x) \to R(x'))) \to \forall x\,R(x)).$$

Se se toma a linguagem da aritmética com os símbolos $\mathsf{0}, \prime, +, \times$ e $<$, pode-se adicionar os seguintes axiomas para descrever seu comportamento:

1. $\forall x\,\neg x' = \mathsf{0}$
2. $\forall x\,\forall y\,(s(x) = s(y) \to x = y)$
3. $\forall x\,(x + \mathsf{0}) = x$
4. $\forall x\,\forall y\,(x + y') = (x + y)'$
5. $\forall x\,(x \times \mathsf{0}) = \mathsf{0}$

6. $\forall x \, \forall y \, (x \times y') = ((x \times y) + x)$

7. $\forall x \, \forall y \, (x < y \leftrightarrow \exists z \, y = (x + z'))$

Não é difícil mostrar que esses axiomas, juntamente com o axioma de indução acima, fornecem uma descrição categórica da estrutura $\mathfrak{N}$, o modelo padrão da aritmética, desde que estejamos usando a semântica plena de segunda ordem. Dada qualquer estrutura $\mathfrak{M}$ na qual esses axiomas são verdadeiros, defina uma função f de $\mathbb{N}$ para o domínio de $\mathfrak{M}$ usando recursão ordinária em $\mathbb{N}$, de modo que $f(0) = \mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$ e $f(x+1) = \prime^{\mathfrak{M}}(f(x))$. Usando indução ordinária em $\mathbb{N}$ e o fato de que os axiomas (1) e (2) valem em $\mathfrak{M}$, vemos que f é injetiva. Para ver que f é sobrejetiva, seja P o conjunto de elementos de $|\mathfrak{M}|$ que estão no alcance de f. Como $\mathfrak{M}$ é plena, P está no domínio de segunda ordem. Pela construção de f, sabemos que $\mathsf{o}^{\mathfrak{M}}$ está em P, e que P é fechado sob $\prime^{\mathfrak{M}}$. O fato de que o axioma de indução vale em $\mathfrak{M}$ (em particular, para P) garante que P é igual a todo o domínio de primeira ordem de $\mathfrak{M}$. Isso mostra que f é uma bijeção. Mostrar que f é um homomorfismo não é mais difícil, usando indução ordinária em $\mathbb{N}$ repetidamente.

Em termos teórico-conjuntistas, uma função é apenas um tipo especial de relação; por exemplo, uma função unária f pode ser identificada com uma relação binária R que satisfaz $\forall x \, \exists! y \, R(x, y)$. Como resultado, pode-se também quantificar sobre funções. Usando a semântica plena, pode-se então definir a classe de estruturas infinitas como a classe de estruturas $\mathfrak{M}$ para as quais há uma função injetiva do domínio de $\mathfrak{M}$ para um subconjunto próprio de si mesma:

$$\exists f \, (\forall x \, \forall y \, (f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \exists y \, \forall x \, f(x) \neq y).$$

A negação dessa sentença define então a classe de estruturas finitas.

Além disso, pode-se definir a classe de ordens bem-fundadas, adicionando o seguinte à definição de uma ordenação linear:

$$\forall P \, (\exists x \, P(x) \to \exists x \, (P(x) \wedge \forall y \, (y < x \to \neg P(y)))).$$

Isso afirma que todo conjunto não vazio tem um elemento mínimo, módulo a identificação de "conjunto" com "relação unária". Como outro exemplo, pode-se expressar a noção de conexidade para grafos, dizendo que não há separação não trivial dos vértices em partes desconectadas:

$$\neg \exists A \, (\exists x \, A(x) \wedge \exists y \, \neg A(y) \wedge \forall w \, \forall z \, ((A(w) \wedge \neg A(z)) \to \neg R(w, z))).$$

Como mais um exemplo, pode-se tentar, como exercício, definir a classe de estruturas finitas cujo domínio tem tamanho par. De modo ainda mais impressionante, pode-se fornecer uma descrição categórica dos números reais como um corpo ordenado completo que contém os racionais.

Em suma, a lógica de segunda ordem é muito mais expressiva do que a lógica de primeira ordem. Essa é a boa notícia; agora a má. Já mencionamos que não há sistema de derivação efetivo que seja completo para a semântica plena de segunda ordem. Para o bem ou para o mal, muitas das propriedades da

lógica de primeira ordem estão ausentes, incluindo compacidade e os teoremas de Löwenheim–Skolem.

Por outro lado, se se está disposto a abrir mão da semântica plena de segunda ordem em favor da mais fraca, então o sistema de derivação mínimo de segunda ordem é completo para essa semântica. Em outras palavras, se lemos $\vdash$ como "demonstra no sistema mínimo" e $\models$ como "implica logicamente na semântica fraca", podemos mostrar que sempre que $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$. Se se quer incluir axiomas específicos de compreensão no sistema de derivação, é preciso restringir a semântica a estruturas de segunda ordem que satisfaçam esses axiomas: por exemplo, se Δ consiste em um conjunto de axiomas de compreensão (possivelmente todos eles), temos que, se $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$. Em particular, se φ não for demonstrável usando os axiomas de compreensão que estamos considerando, então há um modelo de $\neg\varphi$ no qual esses axiomas de compreensão ainda assim valem.

A maneira mais fácil de ver que o teorema de completude vale para a semântica fraca é pensar na lógica de segunda ordem como uma lógica de múltiplas ordenações, da seguinte forma. Uma ordenação é interpretada como o domínio ordinário de "primeira ordem", e então, para cada k, temos a domínio de "relações de aridade k." Tomamos a linguagem com símbolos de relação incorporados "$\mathit{verd}_k(R, x_1, \ldots, x_k)$", destinados a afirmar que R vale de x_1, $\ldots$, x_k, onde R é uma variável da ordenação "relação k-ária" e x_1, $\ldots$, x_k são objetos da ordenação de primeira ordem.

Com essa identificação, a semântica fraca de segunda ordem é essencialmente a semântica usual da lógica de múltiplas ordenações; e já observamos que a lógica de múltiplas ordenações pode ser embutida na lógica de primeira ordem. Módulo as traduções de ida e volta, então, a concepção mais fraca de lógica de segunda ordem é realmente uma forma disfarçada de lógica de primeira ordem, em que o domínio contém tanto "objetos" quanto "relações" governados pelos axiomas apropriados.

byd.4 Lógica de Ordem Superior

fol:byd:hol:sec

Passar da lógica de primeira ordem para a de segunda ordem nos permitiu falar sobre conjuntos de objetos no domínio de primeira ordem, dentro da linguagem formal. Por que parar aí? Por exemplo, a lógica de terceira ordem deveria nos permitir lidar com conjuntos de conjuntos de objetos, ou talvez até conjuntos que contenham tanto objetos quanto conjuntos de objetos. E a lógica de quarta ordem nos permitirá falar sobre conjuntos de objetos desse tipo. Como se pode imaginar, pode-se iterar essa ideia arbitrariamente.

Na prática, a lógica de ordem superior é frequentemente formulada em termos de funções em vez de relações. (Módulo as identificações naturais, essa diferença é inessencial.) Dadas algumas "ordenações" básicas A, B, C, ... (que agora chamaremos de "tipos"), podemos criar novos estipulando

> Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \to \tau$ também o é.

Pense nos tipos como "rótulos" sintáticos que classificam os objetos que queremos em nosso domínio; $\sigma \to \tau$ descreve aqueles objetos que são funções que levam objetos de tipo σ a objetos de tipo τ. Por exemplo, podemos querer ter um tipo Ω de valores de verdade, "verdadeiro" e "falso", e um tipo $\mathbb{N}$ de números naturais. Nesse caso, pode-se pensar em objetos de tipo $\mathbb{N} \to \Omega$ como relações unárias, ou subconjuntos de $\mathbb{N}$; objetos de tipo $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ são funções de números naturais para números naturais; e objetos de tipo $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ são "funcionais", isto é, funções de tipo superior que levam funções a números.

Como no caso da lógica de segunda ordem, pode-se pensar na lógica de ordem superior como uma espécie de lógica de múltiplas ordenações, em que há uma ordenação para cada tipo de objeto que queremos considerar. Mas é usualmente mais claro simplesmente definir a sintaxe da lógica de tipos superiores a partir dos fundamentos. Por exemplo, podemos definir um conjunto de tipos finitos indutivamente, da seguinte forma:

1. $\mathbb{N}$ é um tipo finito.
2. Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \to \tau$ também o é.
3. Se σ e τ são tipos finitos, então $\sigma \times \tau$ também o é.

Intuitivamente, $\mathbb{N}$ denota o tipo dos números naturais, $\sigma \to \tau$ denota o tipo de funções de σ para τ, e $\sigma \times \tau$ denota o tipo de pares de objetos, um de σ e outro de τ. Podemos então definir um conjunto de termos indutivamente, da seguinte forma:

1. Para cada tipo σ, há um estoque de variáveis x, y, z, ... de tipo σ
2. o é um termo de tipo $\mathbb{N}$
3. S (sucessor) é um termo de tipo $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
4. Se s é um termo de tipo σ, e t é um termo de tipo $\mathbb{N} \to (\sigma \to \sigma)$, então R_{st} é um termo de tipo $\mathbb{N} \to \sigma$
5. Se s é um termo de tipo $\tau \to \sigma$ e t é um termo de tipo τ, então $s(t)$ é um termo de tipo σ
6. Se s é um termo de tipo σ e x é uma variável de tipo τ, então $\lambda x.\, s$ é um termo de tipo $\tau \to \sigma$.
7. Se s é um termo de tipo σ e t é um termo de tipo τ, então $\langle s, t \rangle$ é um termo de tipo $\sigma \times \tau$.
8. Se s é um termo de tipo $\sigma \times \tau$, então $p_1(s)$ é um termo de tipo σ e $p_2(s)$ é um termo de tipo τ.

Intuitivamente, R_{st} denota a função definida recursivamente por

$$R_{st}(0) = s$$
$$R_{st}(x+1) = t(x, R_{st}(x)),$$

$\langle s, t\rangle$ denota o par cuja primeira componente é s e cuja segunda componente é t, e $p_1(s)$ e $p_2(s)$ denotam o primeiro e o segundo elementos ("projeções") de s. Finalmente, $\lambda x.\, s$ denota a função f definida por

$$f(x) = s$$

para qualquer x de tipo σ; assim o item (6) nos dá uma forma de compreensão, permitindo-nos definir funções usando termos. As fórmulas são construídas a partir de afirmações de predicado de identidade $s = t$ entre termos do mesmo tipo, dos conectivos proposicionais usuais e da quantificação de ordem superior. Pode-se então tomar os axiomas do sistema como as equações básicas que governam os termos definidos acima, juntamente com as regras usuais da lógica com quantificadores e predicado de identidade.

Se se aumenta o sistema de tipos finitos com um tipo Ω de valores de verdade, é preciso incluir axiomas que governem seu uso também. De fato, se se for astuto, pode-se eliminar fórmulas complexas inteiramente, substituindo-as por termos de tipo Ω! O sistema de prova pode então ser modificado de acordo. O resultado é essencialmente a *teoria simples dos tipos* apresentada por Alonzo Church na década de 1930.

Como no caso da lógica de segunda ordem, há diferentes versões de semântica de tipos superiores que se pode querer usar. Na versão completa, variáveis de tipo $\sigma \to \tau$ variam sobre o conjunto de *todas* as funções dos objetos de tipo σ para objetos de tipo τ. Como se pode imaginar, essa semântica é forte demais para admitir um sistema de derivação completo e efetivo. Mas pode-se considerar uma semântica mais fraca, em que a estrutura consiste em conjuntos de elementos T_τ para cada tipo τ, juntamente com operações apropriadas para aplicação, projeção, etc. Se os detalhes forem desenvolvidos corretamente, pode-se obter teoremas de completude para os tipos de sistemas de derivação descritos acima.

A lógica de ordem superior é atraente porque fornece um arcabouço no qual podemos embutir boa parte da matemática de maneira natural: a partir de $\mathbb{N}$, pode-se definir números reais, funções contínuas e assim por diante. É também particularmente atraente no contexto da lógica intuicionista, pois os tipos têm interpretações "construtivas" claras. De fato, pode-se desenvolver versões construtivas da semântica de tipos superiores (baseadas na lógica intuicionista, em vez da clássica) que esclarecem bastante essas interpretações construtivas e são, em muitos aspectos, mais interessantes do que as contrapartes clássicas.

byd.5 Lógica Intuicionista

fol:byd:il:sec

Em contraste com a lógica de segunda ordem e de ordem superior, a lógica intuicionista de primeira ordem representa uma restrição da versão clássica, destinada a modelar um tipo de raciocínio mais "construtivo". Os exemplos a seguir podem ilustrar algumas das motivações subjacentes.

Suponha que alguém se aproximasse de você um dia e anunciasse que havia determinado um número natural x, com a propriedade de que se x é primo, a

hipótese de Riemann é verdadeira, e se x é composto, a hipótese de Riemann é falsa. Ótimas notícias! Se a hipótese de Riemann é verdadeira ou não é uma das grandes questões em aberto da matemática, e aqui parecem ter reduzido o problema a um cálculo, isto é, à determinação de se um número específico é primo ou não.

Qual é o valor mágico de x? Eles o descrevem assim: x é o número natural que é igual a 7 se a hipótese de Riemann é verdadeira, e 9 caso contrário.

Com raiva, você exige seu dinheiro de volta. De um ponto de vista clássico, a descrição acima de fato determina um valor único de x; mas o que você realmente quer é um valor de x que seja dado *explicitamente*.

Para tomar outro exemplo, talvez menos artificial, considere a seguinte questão. Sabemos que é possível elevar um número irracional a uma potência racional e obter um resultado racional. Por exemplo, $\sqrt{2}^2 = 2$. O que é menos claro é se é possível elevar um número irracional a uma potência *irracional* e obter um resultado racional. O seguinte teorema responde afirmativamente:

Teorema byd.1. *Existem números irracionais a e b tais que a^b é racional.*

Prova. Considere $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se isto é racional, terminamos: podemos tomar $a = b = \sqrt{2}$. Caso contrário, é irracional. Então temos

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

que é certamente racional. Assim, neste caso, tome a como $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e b como $\sqrt{2}$.□

Isso constitui uma prova válida? A maioria dos matemáticos sente que sim. Mas, novamente, há algo um pouco insatisfatório aqui: provamos a existência de um par de números reais com uma certa propriedade, sem poder dizer *qual* par de números é. É possível provar o mesmo resultado, mas de tal forma que o par a, b *é* dado na prova: tome $a = \sqrt{3}$ e $b = \log_3 4$. Então

$$a^b = \sqrt{3}^{\log_3 4} = 3^{1/2\cdot\log_3 4} = (3^{\log_3 4})^{1/2} = 4^{1/2} = 2,$$

pois $3^{\log_3 x} = x$.

A lógica intuicionista foi concebida para modelar um tipo de raciocínio no qual movimentos como o da primeira prova são proibidos. Provar a existência de um x que satisfaz $\varphi(x)$ significa que se deve fornecer um x específico e uma prova de que ele satisfaz φ, como na segunda prova. Provar que φ ou ψ vale requer que se possa provar um ou outro.

Formalmente falando, a lógica intuicionista de primeira ordem é o que se obtém se se restringe um sistema de derivação para a lógica de primeira ordem de certa maneira. Similarmente, há versões intuicionistas da lógica de segunda ou de ordem superior. Do ponto de vista matemático, estes são apenas sistemas dedutivos formais, mas, como já observado, são destinados a modelar um tipo de raciocínio matemático. Pode-se tomar isso como o tipo de raciocínio justificado por uma certa visão filosófica da matemática (como o intuicionismo de

Brouwer); pode-se tomá-lo como um tipo de raciocínio matemático mais "concreto" e satisfatório (na linha do construtivismo de Bishop); e pode-se discutir se a descrição formal captura ou não a motivação informal. Mas quaisquer que sejam as posições filosóficas que possamos ter, podemos estudar a lógica intuicionista como uma lógica formalmente apresentada; e por quaisquer razões, muitos lógicos matemáticos acham interessante fazê-lo.

Há uma interpretação construtiva informal dos conectivos intuicionistas, usualmente conhecida como interpretação BHK (em homenagem a Brouwer, Heyting e Kolmogorov). Ela funciona assim: uma prova de $\varphi \wedge \psi$ consiste em uma prova de φ emparelhada com uma prova de B; uma prova de $\varphi \vee \psi$ consiste em uma prova de φ, ou uma prova de ψ, onde temos informação explícita sobre qual é o caso; uma prova de $\varphi \to \psi$ consiste em um procedimento que transforma uma prova de φ em uma prova de ψ; uma prova de $\forall x\, \varphi(x)$ consiste em um procedimento que retorna uma prova de $\varphi(x)$ para qualquer valor de x; e uma prova de $\exists x\, \varphi(x)$ consiste em um valor de x, juntamente com uma prova de que esse valor satisfaz φ. Pode-se descrever a interpretação em termos computacionais conhecidos como o "isomorfismo de Curry–Howard" ou o "paradigma fórmulas-como-tipos": pense em a fórmula como especificando um certo tipo de dado, e provas como objetos computacionais desses tipos de dados que nos permitem ver que a fórmula correspondente é verdadeira.

A lógica intuicionista é frequentemente pensada como a lógica clássica "menos" a lei do terceiro excluído. O seguinte teorema torna isso mais preciso.

Teorema byd.2. *Intuicionisticamente, os seguintes esquemas de axiomas são equivalentes:*

1. $(\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$.

2. $\varphi \vee \neg\varphi$

3. $\neg\neg\varphi \to \varphi$

Obter instâncias de um esquema a partir de qualquer um dos outros é um bom exercício em lógica intuicionista.

Os primeiros sistemas dedutivos para a lógica proposicional intuicionista, apresentados como formalizações do intuicionismo de Brouwer, são devidos, independentemente, a Kolmogorov, Glivenko e Heyting. A primeira formalização da lógica intuicionista de primeira ordem (e partes da matemática intuicionista) é devida a Heyting. Embora vários esquemas válidos clássicamente não sejam válidos intuicionisticamente, muitos o são.

A *tradução de dupla negação* descreve uma relação importante entre a lógica clássica e a intuicionista. Ela é definida indutivamente da seguinte forma (pense

em φ^N como a tradução "intuicionista" da fórmula clássica φ):

$$\begin{aligned}
\varphi^N &\equiv \neg\neg\varphi \quad \text{para fórmulas atômicas } \varphi \\
(\varphi \wedge \psi)^N &\equiv (\varphi^N \wedge \psi^N) \\
(\varphi \vee \psi)^N &\equiv \neg\neg(\varphi^N \vee \psi^N) \\
(\varphi \to \psi)^N &\equiv (\varphi^N \to \psi^N) \\
(\forall x\, \varphi)^N &\equiv \forall x\, \varphi^N \\
(\exists x\, \varphi)^N &\equiv \neg\neg\exists x\, \varphi^N
\end{aligned}$$

Kolmogorov e Glivenko tiveram versões dessa tradução para a lógica proposicional; para a lógica de predicados, é devida a Gödel e Gentzen, independentemente. Temos

Teorema byd.3. *1. $\varphi \leftrightarrow \varphi^N$ é demonstrável classicamente*

2. Se φ é demonstrável classicamente, então φ^N é demonstrável intuicionisticamente.

Podemos agora imaginar o seguinte diálogo. Matemático clássico: "Provei φ!" Matemático intuicionista: "Sua prova não é válida. O que você realmente provou é φ^N." Matemático clássico: "Tudo bem para mim!" Quanto ao matemático clássico, o intuicionista está apenas sendo minucioso, pois os dois são equivalentes. Mas o intuicionista insiste que há uma diferença.

Note que a tradução acima diz respeito apenas à lógica pura; ela não aborda a questão de quais são os axiomas *não lógicos* adequados para a matemática clássica e intuicionista, ou qual é a relação entre eles. Mas a seguinte extensão ligeira do teorema acima fornece alguma informação útil:

Teorema byd.4. *Se Γ prova φ classicamente, então Γ^N prova φ^N intuicionisticamente.*

Em outras palavras, se φ é demonstrável a partir de algumas hipóteses classicamente, então φ^N é demonstrável a partir de suas traduções de dupla negação.

Para mostrar que uma sentença ou fórmula proposicional é intuicionisticamente válida, basta fornecer uma prova. Mas como se pode mostrar que ela não é válida? Para esse propósito, precisamos de uma semântica que seja correta e, de preferência, completa. Uma semântica devida a Kripke se encaixa bem.

Podemos jogar o mesmo jogo que fizemos para a lógica clássica: definir a semântica e provar correção e completude. Vale a pena, no entanto, notar a seguinte distinção. No caso da lógica clássica, a semântica era a "óbvia", num sentido implícito no significado dos conectivos. Embora se possa fornecer alguma motivação intuitiva para a semântica de Kripke, esta não oferece o mesmo sentimento de inevitabilidade. Além disso, a noção de estrutura clássica é uma noção matemática natural, de modo que podemos ou tomar a noção de estrutura como uma ferramenta para estudar a lógica clássica de primeira

ordem, ou tomar a lógica clássica de primeira ordem como uma ferramenta para estudar estruturas matemáticas. Em contraste, as estruturas de Kripke só podem ser vistas como um construto lógico; elas não parecem ter interesse matemático independente.

Uma estrutura de Kripke $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ para uma linguagem proposicional consiste em um conjunto W, uma ordem parcial R em W com um menor membro, e uma atribuição "monótona" de variáveis proposicionais aos membros de W. A intuição é que os membros de W representam "mundos", ou "estados de conhecimento"; um elemento $v \geq u$ representa um "possível estado futuro" de u; e as variáveis proposicionais atribuídas a u são as proposições que se sabe serem verdadeiras no estado u. A relação de forçamento $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ estende essa relação a fórmulas arbitrárias na linguagem; leia $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ como "φ é verdadeira no estado w." A relação é definida indutivamente, da seguinte forma:

1. $\mathfrak{M}, w \Vdash p_i$ se, e somente se, p_i é uma das variáveis proposicionais atribuídas a w.
2. $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$.
3. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \wedge \psi)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ e $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$.
4. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \vee \psi)$ se, e somente se, $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ou $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$.
5. $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi \to \psi)$ se, e somente se, sempre que $w' \geq w$ e $\mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi$, então $\mathfrak{M}, w' \Vdash \psi$.

É um bom exercício tentar mostrar que $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$ não é intuicionisticamente válida, preparando uma estrutura de Kripke que forneça um contraexemplo.

byd.6 Lógicas Modais

fol:byd:mod:sec

Considere o seguinte exemplo de uma sentença condicional:

> Se Jeremy está sozinho naquela sala, então ele está bêbado, nu e dançando nas cadeiras.

Este é um exemplo de uma asserção condicional que pode ser materialmente verdadeira, mas ainda assim enganosa, pois parece sugerir que há um vínculo mais forte entre o antecedente e a conclusão do que simplesmente o fato de que ou o antecedente é falso ou a conclusão é verdadeira. Ou seja, a formulação sugere que a afirmação não é apenas verdadeira neste mundo particular (onde pode ser trivialmente verdadeira, porque Jeremy não está sozinho na sala), mas que, além disso, a conclusão *teria sido* verdadeira *se* o antecedente tivesse sido verdadeiro. Em outras palavras, pode-se tomar a asserção como significando que a afirmação é verdadeira não apenas neste mundo, mas em qualquer mundo

"possível"; ou que ela é *necessariamente* verdadeira, em oposição a ser apenas verdadeira neste mundo particular.

A lógica modal foi concebida para dar sentido a esse tipo de necessidade. Obtém-se a lógica proposicional modal a partir da lógica proposicional ordinária adicionando um operador caixa; isto é, se φ é a fórmula, então $\Box\varphi$ também o é. Intuitivamente, $\Box\varphi$ afirma que φ é *necessariamente* verdadeira, ou verdadeira em qualquer mundo possível. $\Diamond\varphi$ é usualmente tomada como abreviação de $\neg\Box\neg\varphi$, e pode ser lida como afirmando que φ é *possivelmente* verdadeira. É claro que a modalidade também pode ser adicionada à lógica de predicados.

Estruturas de Kripke podem ser usadas para fornecer uma semântica para a lógica modal; de fato, Kripke projetou essa semântica tendo a lógica modal em mente. Em vez de restringir a ordens parciais, de modo mais geral tem-se um conjunto de "mundos possíveis", P, e uma relação binária de "acessibilidade" $R(x, y)$ entre mundos. Intuitivamente, $R(p, q)$ afirma que o mundo q é compatível com p; isto é, se estamos "em" o mundo p, temos que considerar a possibilidade de que o mundo pudesse ter sido como q.

A lógica modal é às vezes chamada de lógica "intensional", em oposição a uma "extensional". A semântica pretendida para uma lógica extensional, como a lógica clássica, refere-se apenas a um único mundo, o "atual"; enquanto a semântica para uma lógica "intensional" depende de uma ontologia mais elaborada. Além de estruturar a necessidade, pode-se usar a modalidade para estruturar outras construções linguísticas, reinterpretando $\Box$ e $\Diamond$ de acordo com a aplicação. Por exemplo:

1. Na lógica de demonstrabilidade, $\Box\varphi$ é lida como "φ é demonstrável" e $\Diamond\varphi$ é lida como "φ é consistente".
2. Na lógica epistêmica, pode-se ler $\Box\varphi$ como "eu sei φ" ou "eu acredito em φ".
3. Na lógica temporal, pode-se ler $\Box\varphi$ como "φ é sempre verdadeira" e $\Diamond\varphi$ como "φ é às vezes verdadeira".

Gostaríamos de aumentar a lógica com regras e axiomas que lidem com modalidade. Por exemplo, o sistema **S4** consiste nos axiomas e regras ordinários da lógica proposicional, juntamente com os seguintes axiomas:

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$
$$\Box\varphi \to \varphi$$
$$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$$

assim como uma regra, "de φ conclua $\Box\varphi$." **S5** adiciona o seguinte axioma:

$$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$$

Variações desses axiomas podem ser adequadas para diferentes aplicações; por exemplo, S5 é usualmente tomado para caracterizar a noção de necessidade

lógica. E o aspecto agradável é que se pode usualmente encontrar uma semântica para a qual o sistema de derivação é correto e completo, restringindo a relação de acessibilidade nas estruturas de Kripke de maneiras naturais. Por exemplo, **S4** corresponde à classe de estruturas de Kripke em que a relação de acessibilidade é reflexiva e transitiva. **S5** corresponde à classe de estruturas de Kripke em que a relação de acessibilidade é *universal*, isto é, todo mundo é acessível a partir de qualquer outro; assim $\Box\varphi$ vale se, e somente se, φ vale em todo mundo.

byd.7 Outras Lógicas

fol:byd:oth:sec

Como você já deve ter percebido, não é difícil projetar uma nova lógica. Você também pode criar a sua própria sintaxe, montar um sistema dedutivo e elaborar uma semântica para acompanhá-la. Talvez você tenha que ser um pouco esperto se quiser que o sistema de derivação seja completo para a semântica, e pode exigir algum esforço convencer o mundo em geral de que a sua lógica é realmente interessante. Mas, em troca, você pode desfrutar de horas de diversão sadia, explorando as propriedades matemáticas e computacionais da sua lógica.

As últimas décadas testemunharam uma verdadeira explosão de lógicas formais. A lógica difusa é projetada para modelar o raciocínio sobre propriedades vagas. A lógica probabilística é projetada para modelar o raciocínio sobre a incerteza. As lógicas *default* (de exceções) e as lógicas não monotônicas são projetadas para modelar formas revogáveis de raciocínio, isto é, inferências "razoáveis" que podem mais tarde ser derrubadas diante de novas informações. Há lógicas epistêmicas, projetadas para modelar o raciocínio sobre o conhecimento; lógicas causais, projetadas para modelar o raciocínio sobre relações causais; e até mesmo lógicas "deônticas", que são projetadas para modelar o raciocínio sobre obrigações morais e éticas. Dependendo de a principal motivação para a introdução desses sistemas ser filosófica, matemática ou computacional, você pode encontrar estudos sobre essas criaturas sob a rubrica de lógica matemática, lógica filosófica, inteligência artificial, ciência cognitiva ou outro lugar.

A lista não tem fim, e as possibilidades parecem infinitas. Talvez nunca alcancemos o sonho de Leibniz de reduzir toda a razão humana a cálculo —

mas isso não pode nos impedir de tentar.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas